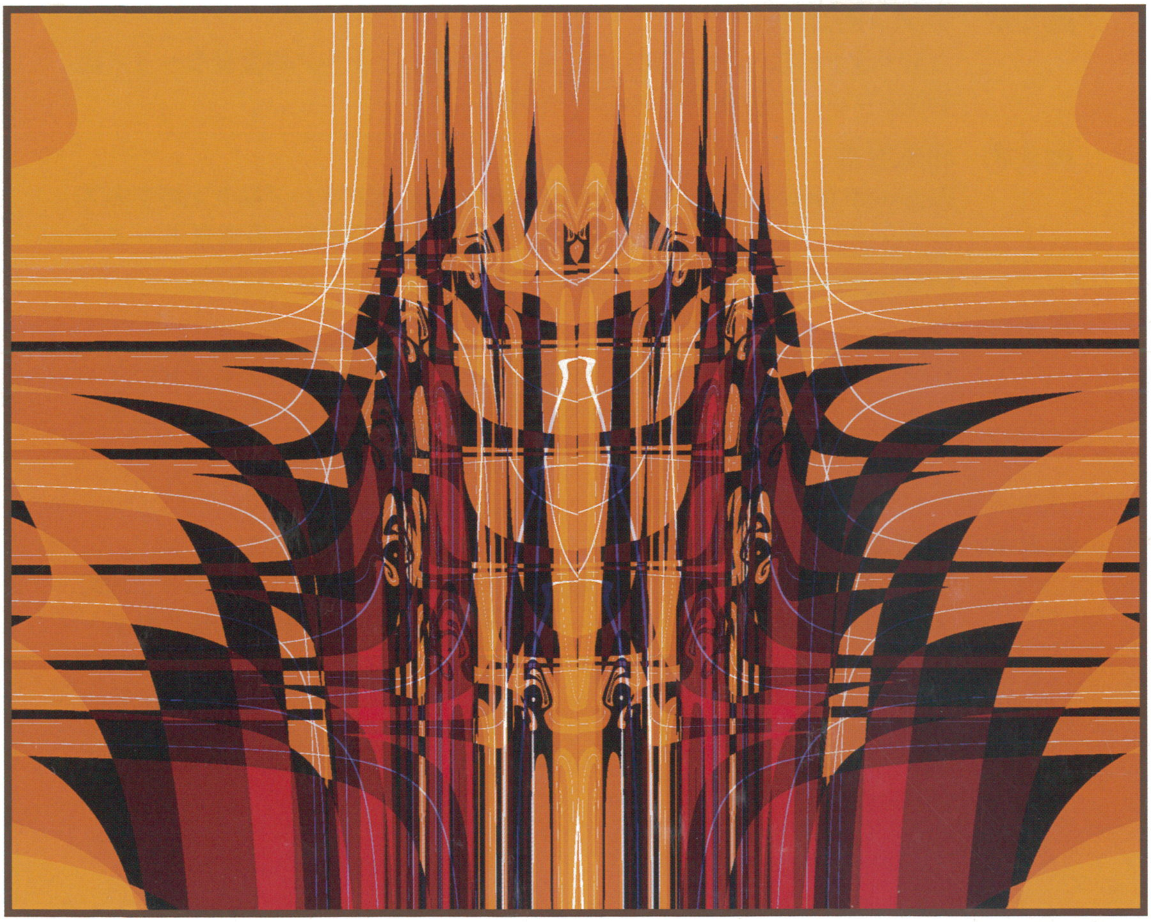
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2011年1月1日発行　第49巻1号　毎月1回1日発行

ISSN 0386—2240

数理科学

1
2011

特集 数論の探求
ゼータからその世界に迫る



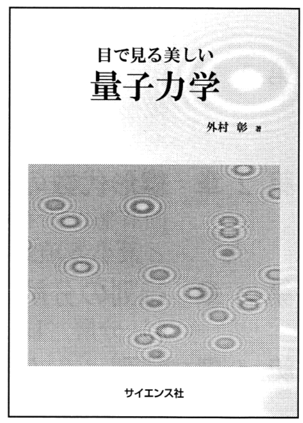
No.571

サイエンス社

目で見る美しい
量子力学

外村　彰　著　　　　　本体 2800 円

実験家の苦悩と喜び．そして，量子力学の真髄に触れる数々の実験の裏側で交わされた先駆者たちとの対話と成功の瞬間を，多くの写真とともに振り返った集大成．
「数理科学」誌の連載「目で見て学ぶ量子力学」(2008 年 4 月号～ 2010 年 8 月号 (全 20 回)) の待望の一冊化．



第 1 章　目で見るミクロの世界／第 2 章　ミクロの世界を探る電子線技術／第 3 章　渡辺宏にあこがれて日立中研に！／第 4 章　干渉性の良い電子の波―トンネル効果で針先から出る電子／第 5 章　目で見る波動関数／第 6 章　二重スリットの実験／第 7 章　二重スリットの実験のその後／第 8 章　アハラノフ・ボーム効果―触れてもいない磁場を感じる電子／第 9 章　アハラノフ・ボーム効果の検証実験／第 10 章　アハラノフ・ボーム効果その後／第 11 章　電子線ホログラフィー―光の波面として再現される電子の波面／第 12 章　電子波の位相を考える／第 13 章　電子の位相で見るミクロの磁力線―干渉電子顕微鏡／第 14 章　超伝導体で囲まれた磁束は量子化する！／第 15 章　超伝導電流が作る渦―磁束量子／第 16 章　磁力線の観察から超伝導を考える／第 17 章　超伝導体内部の磁束量子を見る／第 18 章　高温超伝導体の磁束量子を見る／第 19 章　見えないものを見る／第 20 章　量子力学の展開

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 571 January 2011

数論の探求

ゼータからその世界に迫る

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は1年間(本誌のみ) 11,000円，半年間(本誌のみ) 5,500円．(税込み価格)

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63年/7～2007年/11 省略
2007年/12「時空」への問いかけ
2008年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊 多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和

数理科学臨時別冊一覧

09年/12 ε–δ 論法再入門
10年/1 多彩な量子の世界
10年/3 超関数・フーリエ変換入門
10年/5 問題例で深める物理
10年/6 非線形現象と微分方程式
10年/7 数物系のための圏論
10年/9 超弦理論を学ぶための場の量子論
10年/10 重点解説 ジョルダン標準形
10年/11 重点解説 ベクトル・テンソル
10年/12 行列解析の基礎

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店(新宿)
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店(立川)
くまざわ書店本店(八王子)
くまざわ書店桜ヶ丘店(多摩)
書泉グランデ(神田)
書泉ブックタワー(秋葉原)
三省堂本店(神田)
リブロ池袋店
ジュンク堂書店(池袋)
ジュンク堂書店(新宿)
芳林堂(高田馬場)
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター(東京駅前)
丸善丸の内本店(東京駅前)
ブックファースト青葉台店(横浜)
栄松堂ジョイナス店(横浜)
有隣堂イセザキ町本店(横浜)
有隣堂西口・東口(横浜)
有隣堂厚木店(厚木)
文教堂ブックセンター(川崎)
ジュンク堂書店(盛岡)
ジュンク堂書店(新潟)
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店(大阪)
旭屋本店(大阪)
アバンティブックセンター(京都)
ジュンク堂書店(京都)
ジュンク堂京都BAL店
ジュンク堂書店(神戸)
ジュンク堂三宮駅前店(神戸)
ジュンク堂書店(大分)
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
金港堂(仙台)
金港堂パーク店(仙台)
ジュンク堂書店(仙台)
鹿島ブックセンター(いわき)
友朋堂(つくば)

――大学生協・売店――
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学

MATHEMATICAL SCIENCES
January 2011 Number 571

特集／数論の探求

ゼータへの旅

黒川 信重

本特集は数千年の歴史を持つ数論の現在の様子を伝えることを目的にしている．そうは言っても，数論は幅が広い．ピタゴラスが言った通り『万物は数』であるのだから際限はない．ここでは，ゼータ関数に関連することにテーマを絞ってある．それでも，ゼータも広い．あらゆるところにゼータは遍在している．実際，今回の特集のラインナップから見られるように，数論はゼータを通して，古典的な数論の範囲だけではなく，多様な分野と連携している．それは，保型形式であったり，代数多様体であったり，リーマン多様体であったり，あるいは，物理学であったりする．しかも，複数のテーマと同時に結びついている．それが現在の数論の実態である．

特集の記事の概観を，読み方指南も兼ねて，ざっと紹介しよう．

- 最初に黒川の記事「多角数からゼータへ：紀元前から現代まで」によって，ピタゴラスの時代からゼータへの橋を渡ってほしい．今から2500年前のイタリア南岸のクロトンにあったピタゴラス学校・研究所で考えられていた多角数を，現代的なゼータから見てみよう．
- 現代数論の基本となるゼータ関数と素数分布との関連に関しては平野氏の記事「素数定理：ゼータとリーマン予想」を読まれたい．素数分布という一見すると簡単そうな問題が，ゼータを通して，150年間未解決の数学最大の難問リーマン予想に結びつく様子を見てほしい．
- 保型形式とゼータ関数との関連については，保型形式に対応するゼータ関数だけでなく，セルバーグゼータ関数の零点の固有値解釈（ヒルベルト・ポリヤ予想）まで解説されている権氏の記事「保型形式とゼータ」を読まれたい．ヒルベルトモジュラー群のセルバーグゼータ関数という最新の話題も含まれている．
- 代数多様体のゼータ関数の研究に関しては，高木貞治の類体論（代数体の類体論）の類似・拡張である代数多様体の類体論およびコホモロジーを用いた高次化からの研究の進展とゼータ関数の特殊値表示について，斎藤氏の記事「有限体上の Hasse–Weil ゼータ関数の特殊値」を読まれたい．もともと，高木貞治が1920年に類体論を証明したときにゼータ関数が大活躍したことも覚えておきたい．
- 数論の含蓄の深い書物を解説した髙瀬氏のコラム「名著をめぐって」で，高木貞治の名著を含め，古今の必読書に出会ってほしい．それは必ずしも狭い意味の「数論」あるいは「数学」内に留まっていないのであるが．それも『万物は数』だから当然かも知れない．

後回しになってしまったが，残りの項目にやや詳しく触れよう．保型形式のゼータ関数と代数多

様体のゼータ関数との関係（一致）は「ラングランズ予想」あるいは「非可換類体論予想」と呼ばれ，現代数論の大変重要なテーマとなっている．例えば，フェルマー予想が1995年にワイルズおよびテイラーによって解かれたのはその流れであり，現在まで，ますます強い流れ（もしかすると，現在は激流といっても良いかも知れない）となってきている．実際，2009年には，長年の懸案となっていた「佐藤予想（佐藤–テイト予想）」がテイラーおよび協力者によって（正則）保型形式の範囲まで証明された．これは，数年前には予想もできなかったほどの進展であり，今が，数論の長い歴史において大変革の時期になっていることは間違いない．

このような数論の大発展は，2010年8月にインドで開催された国際数学者会議（ICM）におけるフィールズ賞受賞者にも反映していると言えよう．この賞の対象者は40歳までの数学者であって，4年ごとに通常4人選ばれるので，平均すると毎年1人という割合である．今回の4人のうちの2人は数論であった：

ゴ「セルバーグ跡公式における基本補題Fundamental Lemmaの証明」，

リンデンシュトラウス「数論的量子カオス理論における量子エルゴード性の証明」．

ベトナム出身のゴが解決したのは，ラングランズの予想した「基本補題」である．ラングランズは1970年に非可換類体論として「ラングランズ予想」の構想を提出し（奇しくも，ちょうど高木類体論から50年後であった），その後，その証明の有力な道具としてセルバーグ跡公式を整備していた折に，セルバーグ跡公式の幾何的項（軌道積分）に関する仮説を発表した．それが，「基本補題」であり，次第に，その証明の困難さが明らかになってきて，「補題」では名前負け（？）するような感があった．もともと「補題」というのは，それほど重大なものではないはずなので．いずれにせよ，今回のゴの業績は「基本補題」の考え得るすべての版を完全に証明したもので，ラングランズ予想の研究に一段と弾みをつけるものである．

本特集の中では，ゴの仕事が有効に使われる非可換類体論・ラングランズ予想について，伊藤氏の記事「非可換類体論の現状：ゼータ関数の解析接続法」と吉田氏の記事「ラングランズ予想の展望」を読まれたい．非可換類体論・ラングランズ予想の研究がここ数年（特に，ここ一二年）劇的に進展してきたことがわかる．

プリンストン大学のサルナック教授が創始した「数論的量子カオス理論」において，量子エルゴード性予想が研究されはじめたのは1995年ごろである．リンデンシュトラウスはこの予想を証明した．その解決論文は2005年頃にはできているので，予想の提出から10年という短期間で証明された結果であり，フィールズ賞には珍しい．フィールズ賞は比較的長い間未解決だった問題を解決して受賞する，というのが多かったのである．

リンデンシュトラウスの仕事については，小山氏の記事「数論的量子カオスとゼータ」を参照されたい．数論的量子カオスがゼータと保型形式の深い性質を記述していることがわかる．

終わりに，本特集ではあまり触れられないようなので一言すると，「一元体」上の「絶対数論」も冨に盛んになっている．例えば，2010年11月に開催の高木レクチャー（第8回）にはアラン・コンヌ（Alain Connes; College de France, IHES）による絶対数論とゼータに関する2講演

"The adele class space and the Riemann zeta function"（アデール類空間とリーマン・ゼータ関数）

"The Witt construction in characteristic one and quantization"（標数1におけるヴィット構成と量子化）

が入っている．絶対数論に興味のある方は世界最初の教科書

黒川信重・小山信也『絶対数学』日本評論社，2010年9月

を手に取られることを薦めたい．

本特集によって，数論とゼータ関数の現在を楽しんでいただきたい．

（くろかわ・のぶしげ，東京工業大学大学院理工学研究科）

多角数からゼータへ

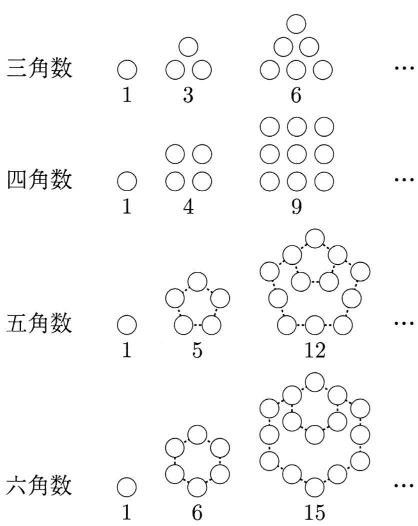
紀元前から現代まで

黒川 信重

1. 多角数

多角数はギリシアのピタゴラス学派（BC 500 頃）によって研究されたものである．彼らは，多角数に限らず，数論を様々に研究した．それは，ピタゴラス学派のモットー「万物は数である」と合致している．

多角数のうちで簡単なものを，絵に画いてみよう．



m 角数（$m=3,4,5,\cdots$）の n 番目の数は

$$P_m(n)=\frac{m-2}{2}n^2-\frac{m-4}{2}n$$

となる．つまり，m 角数は

$$1,\ m,\ 3m-3,\ 6m-8,\cdots$$

となり，

$$\begin{aligned}&\text{三角数の } n \text{ 番目は，} P_3(n)=\frac{n(n+1)}{2},\\ &\text{四角数の } n \text{ 番目は，} P_4(n)=n^2,\\ &\text{五角数の } n \text{ 番目は，} P_5(n)=\frac{(3n-1)n}{2},\\ &\text{六角数の } n \text{ 番目は，} P_6(n)=(2n-1)n\end{aligned}$$

のようになる．

多角数は初等整数論で扱われることが多く，ゼータを考えることはないが，あとでゼータを見てみよう．なお，多角数は**五角数定理**に表れているようにゼータと密接な関係を持つ保型形式にも関連している．

2. ゼータのはじまり

ゼータは 18 世紀の大数学者オイラーが考えはじめた．オイラーは，まず，

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=1+2^{-s}+3^{-s}+4^{-s}+\cdots$$

を詳しく見た．

オイラーは，1735 年に

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\zeta(4)=1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}$$

など $\zeta(2m)$ $(m=1,2,3,\cdots)$ の値をベルヌイ数を用いて求めて，ゼータの深い性質を最初に手に入

れた．この $\zeta(2)$ の式の値を得るために，オイラーは三角関数（正弦関数）$\sin(x)$ の 2 通りの表示

$$\textbf{(A)}\quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots,$$

$$\textbf{(B)}\quad \sin(x) = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

において，x^3 の係数を比較して

$$-\frac{1}{6} = -\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots\right)$$

となることを用いたのであった．この 2 つの表示のうち，無限和表示 (A) はオイラーの前の世代のライプニッツが示していたものであり，無限積表示 (B) がオイラーが独自に発見したものである．(B) は $\sin(x)$ の零点が

$$x = 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \pm 3\pi,\ \cdots$$

のみであることを言っているが，それは，x が実数の範囲だけでなく複素数まで考えても零点がそうなることを含んでいる．

オイラーは，1737 年には $\zeta(s)$ のオイラー積表示

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \prod_{p:\text{素数}} (1-p^{-s})^{-1}\\ &= (1-2^{-s})^{-1}(1-3^{-s})^{-1}\\ &\quad \cdot (1-5^{-s})^{-1}(1-7^{-s})^{-1}\cdots\end{aligned}$$

を発見し，素数研究への道を開いた．

さらに，s が負の整数に対しても——そのときの $\zeta(s)$ はそのままの形では発散してしまうのであるが——，オイラーは

$$\begin{aligned}&\text{“}\zeta(-1)\text{”} = \text{“}1+2+3+4+\cdots\text{”} = -\frac{1}{12},\\ &\text{“}\zeta(-2)\text{”} = \text{“}1+4+9+16+\cdots\text{”} = 0,\\ &\text{“}\zeta(-3)\text{”} = \text{“}1+8+27+64+\cdots\text{”} = \frac{1}{120}\end{aligned}$$

などのように「適切な解釈」(オイラー和公式など）によって値を求めて，関数等式 $\zeta(s) \leftrightarrow \zeta(1-s)$ を導いた：

$$(☆)\quad \zeta(1-s) = \zeta(s)2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right).$$

ここで，$\Gamma(s)$ はオイラーが 1729 年に発見していたガンマ関数であり，自然数 n に対して $\Gamma(n) = (n-1)!$ である．例えば，関数等式 (☆) において $s = 2$ としてみると

$$\zeta(-1) = \zeta(2)2(2\pi)^{-2}\Gamma(2)\cos(\pi)$$

となるが，この等式は

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12},\quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$
$$\Gamma(2) = 1,\quad \cos(\pi) = -1$$

から，成立することがわかる．オイラーの研究については，参考文献の黒川[2~4]を参照されたい．

オイラーのこのような研究を引き継いで，複素変数 s にまで $\zeta(s)$ を拡張して考察したのが，1859 年頃のリーマンの研究であった．リーマンは素数分布の深い謎に至り，数学最大の難問として有名な**リーマン予想**を提示した．

リーマン予想は提示から 150 年ほど経った現在も未解決である．リーマン予想の現状については参考文献の黒川[7]を読まれたい（黒川[5,6]も参照されたい）．

さらに，参考文献の上野[1]は上野健爾さん（当時は修士課程の大学院生）が高校生向けに「大学への数学」誌の 1969 年 5 月号～1970 年 3 月号に連載された記事を一冊にまとめられたものであり，とくに，その第 1 回の「二つの予想」(上野[1] p.1–p.12) にはリーマン予想とラマヌジャン予想の極めて明快な比較解説がなされているので，是非一読されたい．

■ 3. 多角数のゼータ ■

m 角数のゼータを

$$\begin{aligned}Z_m(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_m(n)^{-s}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m-2}{2}n^2 - \frac{m-4}{2}n\right)^{-s}\\ &= 1 + m^{-s} + (3m-3)^{-s}\\ &\quad + (6m-8)^{-s} + \cdots\end{aligned}$$

と構成する．例えば

$$Z_3(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^{-s}$$
$$= 1 + 3^{-s} + 6^{-s} + 10^{-s} + \cdots,$$
$$Z_4(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\right)^{-s}$$
$$= 1 + 4^{-s} + 9^{-s} + 16^{-s} + \cdots$$

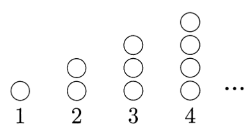
などである．

オイラーが考えたゼータ

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + \cdots$$

は，多角数の観点からは「二角数」のゼータにあたる．“二角数” は通常は考えないが

“二角数”



という系列と考える．実際，m 角数の列

$$P_m(n) = \frac{m-2}{2}n^2 - \frac{m-4}{2}n, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

において $m = 2$ とすると

$$P_2(n) = n, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となる．つまり，

$$\zeta(s) = Z_2(s)$$

ということになる．同時に

$$Z_4(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2s} = \zeta(2s) = Z_2(2s)$$

もわかる．

ゼータの解析接続（一般の複素数 s まで拡張すること）は，場合ごとに困難であることが多いが，多角数のゼータは比較的に扱いやすいので，ここで実行してみよう．ただし，用いる解析接続法は，通常の積分表示法ではなくて，2 項展開を基本にした素朴なものであり，参考文献の黒川・小山[9]序章にあるやり方である．

まず，$m = 2$ のとき，つまり $Z_2(s) = \zeta(s)$ のときを考えよう．このときは黒川・小山[9]に詳しい．はじめは s の実部を 1 より大としておく．すると，

$$\zeta(s) = 1 + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)^{-s}$$
$$= 1 + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s}$$

となる．この級数は絶対収束している．ここで，2 項展開

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix}x^k$$

を用いる：x, α は複素数で $|x| < 1$．ただし，

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ k\end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

は 2 項係数．すると，

$$\zeta(s) = 1 + 2^{-s} + \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-s\\ k\end{pmatrix}n^{-k}$$
$$= 1 + 2^{-s} + \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-s\\ k\end{pmatrix}\sum_{n=2}^{\infty} n^{-s-k}$$
$$= 1 + 2^{-s} + \sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-s\\ k\end{pmatrix}(\zeta(s+k)-1)$$

となる．つまり，

$$\zeta(s) = 1 + 2^{-s} + (\zeta(s)-1)$$
$$-s(\zeta(s+1)-1)$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\begin{pmatrix}-s\\ k\end{pmatrix}(\zeta(s+k)-1)$$

となる．したがって，右辺の $\zeta(s+1)$ を左辺に移して解いて

$$\zeta(s+1)$$
$$= 1 + \frac{2^{-s}}{s} + \frac{1}{s}\sum_{k=2}^{\infty}\begin{pmatrix}-s\\ k\end{pmatrix}(\zeta(s+k)-1)$$

を得る．そこで，s を $s-1$ に置き換えて

$$\zeta(s) = 1 + \frac{2^{1-s}}{s-1}$$

$$+\frac{1}{s-1}\sum_{k=2}^{\infty}\begin{pmatrix}1-s\\k\end{pmatrix}(\zeta(s-1+k)-1)$$

となる．

解析接続は，これで完了している．つまり，$\zeta(s)$ はもともと $\mathrm{Re}(s)>1$ での解析性はわかっていたので，上記の表示における右辺は $\mathrm{Re}(s)>0$ で解析的である（収束性の評価は略したが，黒川・小山[9]を参照されたい）．よって，左辺の $\zeta(s)$ も $\mathrm{Re}(s)>0$ で解析的とわかる．これを繰り返して，$\zeta(s)$ がすべての複素数 s で解析的とわかる．とくに，特殊値を求めることができ，s に $0,-1,-2,\cdots$ を順次に代入して

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2},\quad \zeta(-1)=-\frac{1}{12},\quad \zeta(-2)=0,\cdots$$

を得る．これは，オイラーが求めていた値と一致する．

このようにして，$Z_2(s)$ および $Z_4(s)$ の解析接続と特殊値

$$Z_2(0)=-\frac{1}{2},\quad Z_2(-1)=-\frac{1}{12},\cdots,$$
$$Z_4(0)=-\frac{1}{2},\quad Z_4(-1)=0,\cdots$$

がわかった．とくに，

“二角数（自然数）のゼータ正規化和” $Z_2(-1)$ は $-\frac{1}{12}$，“四角数（平方数）のゼータ正規化和” $Z_4(-1)$ は 0

ということになる．

次に $Z_3(s)$ を見よう．はじめは s の実部が $\frac{1}{2}$ より大としておく．すると

$$Z_3(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{-s}$$
$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{-s}$$
$$=1+2^s\sum_{n=2}^{\infty}n^{-2s}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-s}$$

となるので，2 項展開を用いて

$$Z_3(s)=1+2^s\sum_{n=2}^{\infty}n^{-2s}\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-s\\k\end{pmatrix}n^{-k}$$
$$=1+2^s\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-s\\k\end{pmatrix}\sum_{n=2}^{\infty}n^{-2s-k}$$
$$=1+2^s\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-s\\k\end{pmatrix}(\zeta(2s+k)-1)$$
$$=1+2^s\Big\{(\zeta(2s)-1)-s(\zeta(2s+1)-1)$$
$$+\frac{s(s+1)}{2}(\zeta(2s+2)-1)$$
$$-\frac{s(s+1)(s+2)}{6}(\zeta(2s+3)-1)+\cdots\Big\}$$

となる．すでに $\zeta(s)$ の解析性は示したので，$Z_3(s)$ はすべての複素数 s への解析接続ができた（収束性の評価は略したが，黒川・小山[9]を見られたい）．

とくに，

$$Z_3(0)=-1,\quad Z_3(-1)=0$$

などの特殊値も得られる．よって

“三角数のゼータ正規化和” $Z_3(-1)$ は 0

である．

なお，s が正の整数のところの値

$$Z_3(1)=2,\quad Z_3(2)=\frac{4}{3}(\pi^2-9),$$
$$Z_3(3)=10-\pi^2,\cdots$$
$$Z_4(1)=\frac{\pi^2}{6},\quad Z_4(2)=\frac{\pi^4}{90},$$
$$Z_4(3)=\frac{\pi^6}{945},\cdots$$

などは，あまり難しくなくわかるので調べてほしい．

最後に，$m\geqq 5$ を考えよう．はじめは，s の実部は $\frac{1}{2}$ より大としておくと，これまでと同様に

$$Z_m(s)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m-2}{2}n^2-\frac{m-4}{2}n\right)^{-s}$$
$$=\left(\frac{m-2}{2}\right)^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2s}\left(1-\frac{m-4}{m-2}\cdot\frac{1}{n}\right)^{-s}$$
$$=\left(\frac{m-2}{2}\right)^{-s}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2s}\sum_{k=0}^{\infty}$$
$$\begin{pmatrix}-s\\k\end{pmatrix}\left(-\frac{m-4}{m-2}\right)^{k}n^{-k}$$

$$= \left(\frac{m-2}{2}\right)^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \left(-\frac{m-4}{m-2}\right)^{k} \cdot \zeta(2s+k)$$

$$= \left(\frac{m-2}{2}\right)^{-s} \Biggl\{ \zeta(2s) + s \cdot \frac{m-4}{m-2}\zeta(2s+1) + \frac{s(s+1)}{2}\left(\frac{m-4}{m-2}\right)^{2}\zeta(2s+2) + \frac{s(s+1)(s+2)}{6}\left(\frac{m-4}{m-2}\right)^{3} \cdot \zeta(2s+3) + \cdots \Biggr\}$$

となる．よって，すべての複素数 s への解析接続が得られた．また，特殊値

$$Z_m(0) = -\frac{1}{m-2},$$
$$Z_m(-1) = \frac{(m-3)(m-4)}{6(m-2)^2}$$

が見える．この結果は，前の計算から $m=3,4$ でも成立していることがわかる．

したがって，結論として

> “m 角数のゼータ正規化和 $P_m(1)+P_m(2)+\cdots$” $Z_m(-1)$ が零となるのは $m=3,4$ のときのみ

であることがわかる．

4. 最近のゼータ

ゼータは，$\zeta(s)$ 以後，より一般の数論的対象に拡張されて考察されてきた．その様子は今回の特集にて見やすいが，ゼータの構成されている対象としては，代数体，保型形式，ガロア表現，スキーム，絶対代数，絶対スキーム，…と増え続けている．

ゼータの力の表れた代表例は，1995 年にフェルマー予想が解かれたことである．それは，保型形式のゼータと楕円曲線のゼータ（ガロア表現のゼータ）との対応を確立した結果であった．この流れは 2009 年の佐藤–テイト予想の証明へと続いている．ここでも，ガロア表現のゼータが大活躍している．本年 2011 年 10 月 25 日に生誕 200 年を迎えるガロアの先見の明に驚く．

終りに，ゼータを深く理解するには，最近，集中的に研究されている絶対数学が役に立つ．絶対数学とは一元体上の数学のことであるが，その現状については黒川[8]，黒川・小山[9]をすすめる．また，絶対数学の起源を与える黒川の 1991 年の講義「多重三角関数論講義」（東京大学，1991 年 4 月–7 月）に関しては，小山信也さんによる記録（参考文献の黒川・小山[10]）が出版されて見やすくなっている．絶対数学の開拓にも進まれたい．

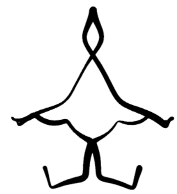
参考文献

1) 上野健爾『数学者的思考トレーニング　代数編』岩波書店，2010 年 7 月．
2) 黒川信重『数学の夢　素数からのひろがり』岩波書店，1998 年．
3) 黒川信重『オイラー，リーマン，ラマヌジャン　時空を超えた数学者の接点』岩波書店，2006 年．
4) 黒川信重『オイラー探検　無限大の滝と 12 連峰』シュプリンガー・ジャパン，2007 年．
5) 黒川信重「超弦理論と数論」素粒子論研究，**74** (1987), D24–D39.
6) 黒川信重「量子空間と Riemann 予想」日本物理学会誌，**53** (1998), 696–699.
7) 黒川信重『リーマン予想の 150 年』岩波書店，2009 年 11 月．
8) 黒川信重「絶対数学の発見」現代思想，2010 年 9 月号，66–71.
9) 黒川信重・小山信也『絶対数学』日本評論社，2010 年 9 月．
10) 黒川信重・小山信也『多重三角関数論講義』日本評論社，2010 年 11 月．

（くろかわ・のぶしげ，東京工業大学大学院理工学研究科）

素数定理

ゼータとリーマン予想



平野　幹

素数に関する問題は，いつの時代においても整数論の深い考察を導いてきた．「素因数分解の一意性」すなわち，2 以上の自然数は（順序を除き）一意的に素数の積として表される，という素数の重要性の根拠である最も基本的な事実は，自然数のべきの逆数についての無限級数に対する**オイラー積**として解析的に表現される．この無限級数は，リーマンによって今日**リーマンゼータ関数**と呼ばれる複素関数として定式化され，特にその非自明零点の位置が素数分布の鍵を握ることが示された．実部が 1 なる非自明零点をリーマンゼータ関数がもたないことは「**素数定理**」を意味し，**リーマン予想**，すなわちリーマンゼータ関数の非自明零点の実部がすべて $\frac{1}{2}$ であるという予想の成立は「素数分布の究極評価」を与える．「素数定理」はリーマンの与えたこの方針に沿う形で 1896 年にアダマールとド・ラ・ヴァレ＝プーサンによって確立されたが，「究極評価」つまりリーマン予想は数学最難問の一つとされ，多くの数学者の関心を惹き続けている．

1. 素数定理

素数についての最も基本的な問題は，素数はいくつあるか？ という素朴な疑問だろう．この素朴な問いについての解答は古代ギリシャ時代から知られ，ユークリッド『原論』に証明が記されている：

$p_1, \cdots, p_N$ を素数とする．このとき

$$p_1 \times \cdots \times p_N + 1$$

は $p_1, \cdots, p_N$ のどれでも割り切ることができないため，その素因数分解に現れる素数は $p_1, \cdots, p_N$ 以外であり，これを繰り返せば素数が無限に存在することがわかる．

数行の議論で完結するこの知恵に溢れる証明は，残念ながら素数の分布について何ら情報を与えない．

18 世紀に入り，素数が無限に存在することのまったく新しい証明がオイラーにより与えられた．その証明の鍵となるのは，自然数のべきの逆数和

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} + \cdots$$

に対する素数全体にわたる積表示

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{2^{3m}} + \cdots\right) \\
&\times \left(1 + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{3^{3m}} + \cdots\right) \\
&\times \left(1 + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{5^{2m}} + \frac{1}{5^{3m}} + \cdots\right) \cdots \\
= &\frac{1}{1 - 2^{-m}} \cdot \frac{1}{1 - 3^{-m}} \cdot \frac{1}{1 - 5^{-m}} \cdots
\end{aligned}$$

である．上の素数全体にわたる積はオイラー積と呼ばれるが，このオイラー積が自然数のべきの逆数についての無限級数を与えることは，左辺を展開し素因数分解の一意性を用いることによりわか

る．さて，この自然数にわたる和と素数にわたる積の等式において $m=1$ とすると，

$$\begin{aligned}&1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots\\&=\frac{1}{1-2^{-1}}\cdot\frac{1}{1-3^{-1}}\cdot\frac{1}{1-5^{-1}}\cdots\end{aligned}$$

なる等式が得られるが，左辺は発散する無限級数であるため右辺は有限積でなく，素数は無限に存在することが示されるのである．

オイラーは上の主張よりもさらに精密な考察により，素数の逆数和が発散することを述べ，

$$\sum_p \frac{1}{p}=\log\log\infty$$

と記している．この記述は，おそらく

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\sim\log\log x,\quad x\to\infty$$

のことであると推測されるが，単に素数が無限に存在することよりも詳しい素数分布についての定量的な主張であり，「素数定理」の原型と考えるのが妥当だろう．

素数定理とは，x 以下の素数の個数 $\pi(x)$ の増大度の評価についての定理である．すなわち，素数が無限に存在することは $x\to\infty$ なるとき $\pi(x)$ が発散することを意味するが，どのような関数によって $\pi(x)$ の発散の様子が正確に近似できるか？という問いに解答するのが素数定理である．

関数 $\pi(x)$ の近似は多くの数学者によって考察された．18 世紀末から 19 世紀初頭にかけて提案された，ルジャンドルの近似式

$$\frac{x}{\log x - B(x)}$$

($B(x)$ は $\lim_{x\to\infty}B(x)=1.08366...$ なるある関数）やガウスの予想

$$\int_2^x \frac{du}{\log u}$$

などがとりわけ有名である．ガウスの予想した積分は，部分積分により

$$\begin{aligned}\int_2^x\frac{du}{\log u}&=\frac{x}{\log x}-\frac{2}{\log 2}+\int_2^x\frac{du}{(\log u)^2}\\&\sim\frac{x}{\log x},\quad x\to\infty\end{aligned}$$

と計算できるから，どちらの近似式も $\frac{x}{\log x}$ が $\pi(x)$ の第一次近似であるとの予想といえる．また，上述のオイラーの主張も同様に，$\pi(x)$ の増大度は $\frac{x}{\log x}$ であることを示唆していると見ることができる．

予想でない $\pi(x)$ の増大度についての実質的な結果が得られたのは，19 世紀中頃になってからである．とりわけ重要な結果は，チェビシェフによる

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}\le 1\le\limsup_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}$$

なる不等式，すなわちもし極限値

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x/\log x}$$

が存在するならばその極限値は 1 である，という主張（しかしながら，その極限値が存在することの証明には至っていない）や，

$$c_1\frac{x}{\log x}\le\pi(x)\le c_2\frac{x}{\log x}$$

をみたす正定数 c_1, c_2 が存在する，という主張である．これらの結果は，オイラー，ルジャンドル，ガウスらの予想を支持する中間的な成果として意味が大きい．

リーマンは 1859 年に発表した「与えられた大きさ以下の素数の個数について」と題した 10 ページの論文[4]において，素数定理に対する画期的なアプローチを提示した．詳しくは後述するが，リーマンはオイラーが発見した無限級数のオイラー積表示

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}$$

において s を複素変数とすることによりゼータ関数 $\zeta(s)$ を定義した．上の無限級数および無限積は実部が 1 より大きな s に対してのみ収束する表示であるが，リーマンは複素関数 $\zeta(s)$ に対する積分表示により解析接続と関数等式を明確に証明し，その上で $\zeta(s)$ の非自明零点の位置が $\pi(x)$ の増大度の評価と密接な関係を持つことを明らかにしたのである．リーマン自身は素数定理の証明には至らなかったが，このリーマンの方針，すなわちゼータ関数 $\zeta(s)$ の非零領域の考察への帰着は，

1896年，アダマールとデ・ラ・ヴァレ＝プーサンの手によって独立に，素数定理

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \to \infty$$

の証明に結実した．

素数定理が確立してからも，別証明の模索など素数定理は数学者の関心であった．特に，1930年代に与えられた，有理型に解析接続されるディリクレ級数の収束軸上の非零性と素数定理の関係を一般的な枠組みで解明する**ウィナー・池原によるタウバー型定理**は，汎用性も広く重要な成果だろう．複素関数論もゼータ関数も用いない素数定理の「初等的証明」は，1949年にセルバーグとエルデシュによって独立に与えられた．ウィナー・池原の定理による素数定理と複素解析的議論の関係が示された後であったため，この証明は多くの数学者に驚きを与えた．なお，ここでの「初等的」の意味はあくまでも道具が初等的であることであって，議論が簡単であることを意味しない．

2. 素数定理とリーマン予想

リーマンが記念碑的論文において議論したのは，ゼータ関数 $\zeta(s)$ の非自明零点と素数分布との関係であり，x 以下の素数の個数 $\pi(x)$ に対する第一次近似，すなわち「素数定理」よりもっと精密な「**素数公式**」と呼べるものを目指していた．ところが，リーマン自身はこの論文において素数定理の証明を完了できず，最終的な素数定理の決着はこの論文が発表されてから30年以上経た後であったことは上述のとおりである．ここでは，リーマンの「素数公式」の導出を説明し，素数定理とゼータ関数の非自明零点との関係について，簡単に述べたい．

まず，ゼータ関数のオイラー積表示により，$\mathrm{Re}\, s > 1$ の範囲で等式

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log\left(1 - p^{-s}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_p p^{-ms}$$

が成り立つことに注意する．さて，

$$\Pi(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\pi(x^{\frac{1}{m}})$$

とおくと，関数 $\Pi(x)$ とゼータ関数 $\zeta(s)$ の関係

$$\begin{aligned}
&\int_1^{\infty}\Pi(x)x^{-s-1}dx \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\int_1^{\infty}\pi(x^{\frac{1}{m}})x^{-s-1}dx \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_p\int_{p^m}^{\infty}x^{-s-1}dx \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_p\frac{1}{s}\cdot p^{-ms} \\
&= \frac{\log\zeta(s)}{s}
\end{aligned}$$

のメラン逆変換により，$\Pi(x)$ の表示

$$\Pi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\log\zeta(s)}{s}\cdot x^s ds \quad (c > 1)$$

が得られる．ゼータ関数 $\zeta(s)$ は $s = 1$ にある一位の極を除き全複素平面で正則であることから，この表示の右辺の積分に留数定理を適用すれば「素数公式」

$$\Pi(x) = \mathrm{li}(x) - \sum_\rho \mathrm{li}(x^\rho) + \int_x^{\infty}\frac{du}{(u^2-1)u\log u} - \log 2$$

が導かれる．ここに，

$$\begin{aligned}
\mathrm{li}(x) &= \int_0^x\frac{du}{\log u} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\varepsilon}\frac{du}{\log u} + \int_{1+\varepsilon}^x\frac{du}{\log u}\right)
\end{aligned}$$

であり，ρ についての和は帯状領域 $0 \leq \mathrm{Re}\, s \leq 1$ にある $\zeta(s)$ の非自明零点をわたる．

このようにして素数分布とゼータ関数の非自明零点との密接な関係が「素数公式」として得られるが，メビウス反転公式により

$$\pi(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(m)}{m}\Pi(x^{\frac{1}{m}})$$

と $\pi(x)$ を $\Pi(x)$ で表せば（$\mu(m)$ はメビウス関

数）$\pi(x)$ の増大度の評価

$$\pi(x) = \Pi(x) + O(x^{\frac{1}{2}})$$
$$= \mathrm{li}(x) - \sum_{\rho} \mathrm{li}(x^{\rho}) + O(x^{\frac{1}{2}}), \quad x \to \infty$$

が導出され，$\zeta(s)$ の非自明零点の位置が $\pi(x)$ の増大度を決定することがわかる．

さて，ゼータ関数の非自明零点であるが，オイラー積表示および関数等式

$$\hat{\zeta}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \hat{\zeta}(1-s)$$

により，臨界領域 $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ 内に $s = \frac{1}{2}$ に関して対称に位置することがわかる．ガウスの予想のところで触れたように $\mathrm{li}(x) \sim x/\log x$ $(x \to \infty)$ であるから，$\zeta(s)$ の非自明零点が $\mathrm{Re}(s) = 1\,(s \neq 1)$ 上に存在しなければ $\mathrm{li}(x)$ が $\pi(x)$ の第一次近似となり，素数定理が結論される．また，$\zeta(s)$ の非零領域を $1-\varepsilon \leq \mathrm{Re}\, s\ (0 < \varepsilon < \frac{1}{2})$ とさらに広げることができれば $\pi(x)$ の増大度の誤差項評価の精度を上げることができ，特にリーマンがこの論文で「極めて確からしい」と述べたリーマン予想の成立は究極的な評価

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}} \log x), \quad x \to \infty$$

を導く．現在，リーマン予想はおろか非零領域を広げるどんな小さな ε の存在も示されていないが，非自明零点のうちリーマン予想をみたすものが無限に多く存在すること（ハーディー (1914)），リーマン予想をみたす零点の割合が正であること（セルバーグ (1942)），さらにはその割合が 40%以上であること（コンリー (1989)），などの成果がリーマン予想の成立を支持している．

3. ウィナー・池原のタウバー型定理

アダマールとデ・ラ・ヴァレ＝プーサンによる素数定理の証明が発表された後の重要な成果の一つとして，ウィナー・池原のタウバー型定理がある．タウバー型定理とは，べき級数に関するアーベルの定理の逆，すなわちべき級数の係数和の増大度

についての諸定理を指し，様々な条件下で考察され多くの種類の主張が知られている．ウィナー・池原の定理はこのタウバー型定理の一種で，扱いが容易で素数定理成立の仕組みについての一般的な枠組みの説明を可能にするものである．定理の主張は以下のとおりである：

関数 $F(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ は係数 a_n が非負実数であるディリクレ級数とし，$\mathrm{Re}\, s>1$ で絶対収束するものとする．さらに，$F(s)$ が $\mathrm{Re}\, s\geq 1$ を含むある領域に有理型に接続され，その範囲で $s=1$ における留数 $R\geq 0$ の一位の極を除き正則であるとする．このとき，

$$\sum_{n\leq x} a_n \sim Rx, \quad x\to\infty$$

が成り立つ．

以下，このウィナー・池原の定理を用いた素数定理の証明の概略を述べることにする．前節で述べたようにゼータ関数の対数 $\log\zeta(s)$ は無限和によって表示されるが，その項別微分により $\mathrm{Re}\, s>1$ で成立する等式

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

を得る．ここに $\Lambda(n)$ はフォン・マンゴルト関数，すなわちある素数 p によって $n=p^k$ となっているとき $\Lambda(n)=\log p$，そうでないとき $\Lambda(n)=0$ として定義される関数である．この右辺のディリクレ級数はウィナー・池原の定理の条件を $R=1$ として満足し，従って係数和の評価

$$\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\sim x, \quad x\to\infty$$

を得るが，この評価が素数定理と同値であることは簡単な考察により示される．

4. 様々な素数定理

上に述べてきた素数定理には，関連する問題が多数知られている．これらの問題のうち，素数定理の精密化や類似と呼べるものをいくつか紹介したい．

リーマンの直接の師であったディリクレ（1805–1859）によって得られた等差数列における素数分布を主張する**算術級数定理**は，リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の類似である **ディリクレの L 関数**

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}=\prod_p\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}$$

が（非自明な χ に対し）$s=1$ において 0 でないことにより示される．ここに χ は法 m のディリクレ指標，すなわち乗法群 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$ 上の指標（の延長）であり，その主張は以下のとおりである：互いに素な自然数 m と a に対し，集合 $S_{m,a}=\{a+mk\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$ は無限に多くの素数を含み，$S_{m,a}$ に含まれる x 以下の素数の個数を $\pi_{m,a}(x)$ で表すとき

$$\pi_{m,a}(x)\sim\frac{1}{\varphi(m)}\mathrm{li}(x), \quad x\to\infty$$

が成り立つ．ただし，$\varphi(m)$ は群 $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$ の位数，すなわち m と互いに素な m 以下の自然数の個数を表すオイラー関数である．

ディリクレの算術級数定理は，代数体のガロア拡大における不分岐素点の分布についての**チェボタレフの密度定理**（1926）に一般化される．チェボタレフの密度定理の証明では，ディリクレ L 関数の代わりに **アルチン L 関数**が $s=1$ で消えないことが肝要となる．

リーマンゼータ関数の幾何学的類似ともいうべき**セルバーグゼータ関数**は，局所リーマン多様体上の調和解析と解析数論との関係を明らかにしたセルバーグの著名な論文[6]において定義されたゼータ関数である．局所リーマン多様体を定める離散部分群に関連した整数論の視点からも興味深いセルバーグゼータ関数は，そのラプラシアンのスペクトルに由来する非自明零点について（有限個の例外を除き）リーマン予想の類似を満足することが特徴的である．種数 $g\geq 2$ のコンパクトリーマン面 $X\simeq\Gamma\backslash\mathbf{H}$（$\mathbf{H}$ は複素上半平面，Γ は X の基本群と同型な $PSL(2,\mathbf{R})$ の離散部分群）に対

するセルバーグゼータ関数 $Z_X(s)$ は，Γ における原始的な双曲共役類 $\{P_0\}$ についてのオイラー積により $\mathrm{Re}\, s > 1$ において次のように定義される：

$$Z_X(s) = \prod_{\{P_0\}} \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - N(P_0)^{-s-k}\right).$$

ここに，ノルム $N(P_0)$ は P_0 の固有値の平方のうち 1 より大なるものであり，X において P_0 が定める素な閉測地線の長さ $l(P_0)$ と $N(P_0) = \exp(l(P_0))$ なる関係がある．リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ と同様に，セルバーグゼータ関数 $Z_X(s)$ は全複素数平面へ解析接続され，s と $1-s$ での値についての関数等式が成立する．

セルバーグゼータ関数 $Z_X(s)$ によって考察される素数定理の類似は**素測地線定理**（もしくは素弦定理）と呼ばれ，Γ の原始的双曲共役類あるいはリーマン面 X における素な閉測地線を対象とする．通常の素数定理の場合にならい，ノルムが x 以下である原始的双曲共役類の個数を $\pi_0(x)$ とおけば，

$$\pi_0(x) \sim \mathrm{li}(x), \quad x \to \infty$$

が成り立つ．さらに，この場合にもチェボタレフ型「密度定理」を考えることができる．

コンパクトリーマン面だけでなく，体積有限な非コンパクトリーマン面，さらには高次元の局所対称空間 X に対しても，セルバーグゼータ関数 $Z_X(s)$ を定義することができる．数論的に興味深いのは，X を定める離散部分群 Γ がモジュラー群 $SL(2,\mathbb{Z})$ のときである．この場合の X はカスプを持つ非コンパクト面であるが，Γ の原始的双曲共役類は実二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の基本単数 ε_d により記述され，素測地線定理は類数 $h(d)$ の分布定理

$$\sum_{\varepsilon_d \le x} h(d) \sim \mathrm{li}(x^2),\ x \to \infty$$

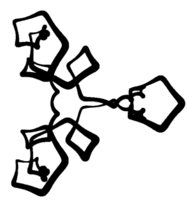
となり，数論的に翻訳される[5]．さらには三次体，四次体についても同様な結果が得られているが[1]，これは高階のセルバーグゼータ関数についての最新の成果からの帰結である．

参考文献

1) Deitmar, A., Pavey, M., Class numbers of orders in complex quartic fields, *Math. Ann.* **338** (2007), 767–799.
2) Hejhal, D.A., The Selberg trace formula for $PSL(2,\mathbf{R})$ vol.1 *Lecture Notes in Math.* **548** (1976), Springer.
3) Narkiewicz, W., *The Development of Prime Number Theory, Springer Monographs in Math.* (2000), Springer.
4) Riemann, B., Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, *Monatsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin* (1859), 671–680.
5) Sarnak, P., Class numbers of indefinite binary quadratic forms, *J. Number Theory* **15** (1982), 229–247.
6) Selberg, A., Harmonic analysis and discontinuous groups on weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series, *J. Indian Math. Soc.* **20** (1956), 47–87.
7) 黒川信重，小山信也，『リーマン予想のこれまでとこれから』，亀書房・日本評論社．
8) 砂田利一，『基本群とラプラシアン』，紀伊国屋書店．
9) 松本耕二，『リーマンのゼータ関数』，朝倉書店．

（ひらの・みき，愛媛大学理学部）

数論的量子カオスとゼータ



小山　信也

数論的量子カオスとゼータの理論について，最近，初心者向けの解説書[1)]を刊行した．素朴な素数から始めてゼータ関数，そして，リンデンシュトラウスによるフィールズ賞受賞研究も含む量子カオスの最先端までを解説した入門書である．数学的な理論の詳細は，そちらを参照されたい．本稿では，この話題の物理学的な側面と，その数学への関連を中心に述べる．

1. 数論的量子カオスとは

図1～3は $\mathbb{R}^2$ 内の有界領域 Ω 上のラプラシアン

$$\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

の固有方程式

$$\Delta u = \lambda u, \quad \int_\Omega u^2 dxdy = 1$$

の解を，ディリクレ境界条件 $u|_{\partial\Omega} = 0$ の下で解いた際の，5600番目付近の12個の固有値に対する固有関数の値分布を表したもの[*1)]である．

図の順序は左上から右へ，次に下行の左から右へとなっている．$u(z) = 0$ なる z を白で，$|u(z)|$ が大きい z ほど濃い黒で示す．図1は楕円領域，図2はスタジアム，図3はバーネット・ビリヤードと呼ばれる領域を，Ω として採用している．

これらの図の物理学的な意義は量子力学に熟練している読者には明白だろうが，高校生など知識の少ない読者のため簡単に説明[*2)]しておく．

量子力学におけるシュレディンガー方程式は，ハミルトニアンと呼ばれる作用素の固有方程式である．量子力学では，物理量がこのような作用素であると考える．

古典力学のハミルトニアンを量子化すると，量子力学におけるハミルトニアン $\hbar^2\Delta$ を得る[*3)]．

よって，量子力学における状態方程式は，$\hbar^2\Delta$ の k 番目の固有値を λ_k，固有関数を u_k とすると $\hbar^2\Delta u_k = \lambda_k u_k$ と書ける．これより，$\Delta u_k = \frac{\lambda_k}{\hbar^2} u_k$ である．ゆえに，Δ の固有値 λ は次のようになる．

$$\lambda = \frac{\lambda_k}{\hbar^2}. \tag{2}$$

さて，古典力学と量子力学の整合性に関し**準古典極限**と呼ばれる考えがある．$\hbar \to 0$ の極限が古典力学を記述するというものだ．この極限は，(2)により $\lambda \to \infty$ と同じになる．したがって，$\lambda \to \infty$ は重要な極限である．とりわけ $|u_k|$ が大きくなる点は，確率が高い点なので物理学的な意義がある．

図1～3を見ると，黒い部分が何らかの図形をな

*1)　図は http://www.math.princeton.edu/sarnak/ にある論文 P. Sarnak "Recent Progress on QUE" から転載した．原図は A. Barnett による．

*2)　文献1) 第13章には，数論的量子カオスのために量子力学の概要を簡単にまとめた初心者向けの解説がある．

*3)　$\hbar$ は，プランク定数 $h = 6.626 \times 10^{-34}\mathrm{J \cdot s}$ を 2π で割った $\hbar = 1.054 \times 10^{-34}\mathrm{J \cdot s}$ のこと．また，通常，物理学では $-\hbar^2\Delta$ と書かれることが多いが，これは Δ の定義の符号の違いによる．本稿では定義を(1)で与えている．

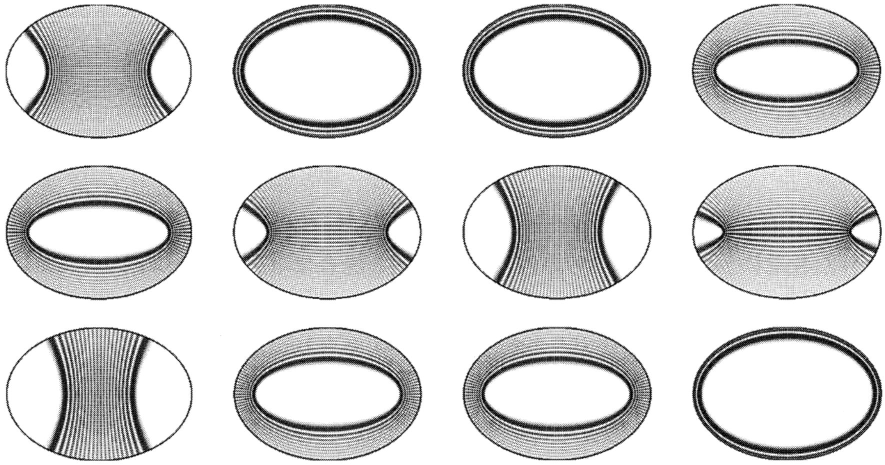


図1　楕円領域上の波動関数*1).

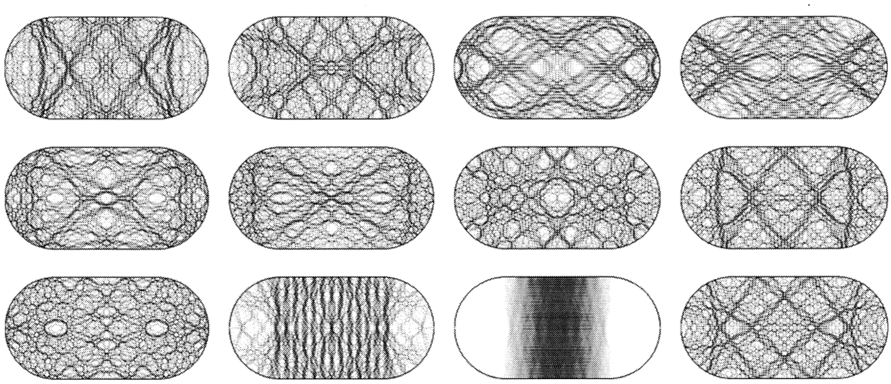


図2　スタジアム領域上の波動関数*1).

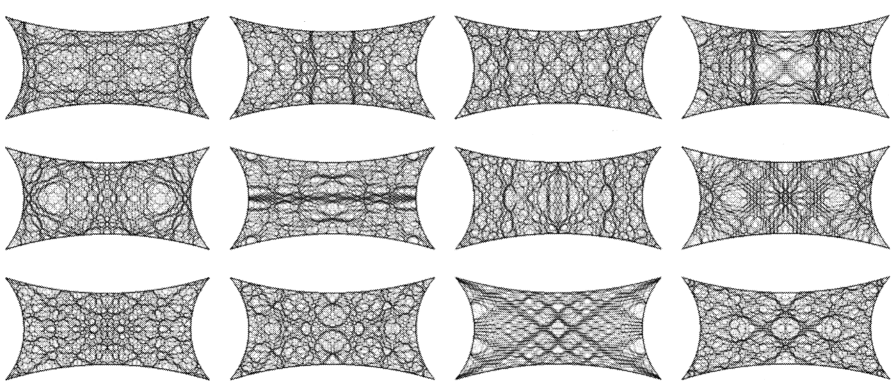


図3　バーネット・ビリヤード上の波動関数*1).

すかのように見える箇所がある．当初，一部の物理学者*4)が，この図形に意味を見出そうとした．有界領域 Ω 内にボールを転がしたとき，壁に反転してボールが描く軌跡（測地線）に，この図形が似ているのではないかというわけだ．ボールの軌跡は，古典力学で物体が存在し得る位置であり，一方，黒い図形は量子力学で粒子が存在しやすい位置を表すから，準古典極限において両者に関連

*4）例えば E. J. Heller: "Bound-state eigenfunctions of classically chaotic Hamiltonian systems: scars of periodic orbits", *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 1515–1518.

がつくとなれば，古典力学と量子力学の間に極めて美しい類似性が成り立つことになる．そういう予想を彼らは提起した．

しかし，次節に述べるように，彼らの夢は数論的量子カオスの研究によって打ち砕かれた．

数論的量子カオスは，1992 年にサルナックによって提唱された数論の分野である．その内容は「数論的群のスペクトル λ と固有関数 u_λ を，特に $\lambda \to \infty$ のときに詳しく研究すること」である．

この研究の数論における重要性は，2 点ある．第一は，スペクトルがゼータの零点とみなせること，これについては文献 2) で詳しく述べた．そして第二は，スペクトルの存在そのものが数論的であることだ．これについては文献 1) 第 12 章で詳しく述べた．

2. 種々の結果

数論的量子カオスの結果は多岐に渡るが，おおむね，次の 3 つのタイプに分けられる．

2.1 固有値 $\boldsymbol{\lambda}$ のばらつきに関する結果

固有値列を $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$ とし，$N(\lambda) = \#\{\lambda_n \mid \lambda_n \leq \lambda\}$ と置く．合同部分群の場合，$N(\lambda) \sim C\lambda(\lambda \to \infty,\ \exists C > 0)$ が知られている．これを**ワイルの法則**という．ワイルの法則は，これまでに知られているすべての実例について成立する．固有値列を適当に定数倍し $C = 1$ となるように正規化すると，**分散**は

$$\Sigma^2(\lambda, L) = \frac{1}{\lambda}\int_{\lambda}^{2\lambda} (N(\xi + L) - N(\xi) - L)^2 \, d\xi$$

で定義される．

分散に関し，L が小さく $\lambda \to \infty$ の場合の挙動に興味がある．すなわち，比較的狭い区間にどれくらい固有値が存在するのか，その個数を評価することで固有値のばらつき具合を測り，その狭い区間の位置を ∞ に飛ばしたときの挙動を見たい．

以下，$f(\lambda) \ll g(\lambda)$ を，$f(\lambda) = O(g(\lambda))$ $(\lambda \to \infty)$ の意味に用いる．

数値計算によって，$L \ll \sqrt{\lambda}$ の下では分散 $\Sigma^2(\lambda, L)$ の $\lambda \to \infty$ における挙動は L によらず，基本群が数論的であるか否かにのみよることが観察されている．これまでなされた数値計算では，数論的な場合のほうが分散が極めて大きい．

これらの現象に直接的な証明を与えるのは難しいが，平均値 $\overline{\Sigma}^2(\lambda, L) = \frac{1}{L}\int_0^L \Sigma^2(\lambda, u)du$ について，ある程度の結果を得ることができる．非数論的な場合は $\overline{\Sigma}^2(\lambda, L) \sim c\log\lambda$ $(\lambda \to \infty\ \exists c > 0)$ となるのに対し，数論的な場合はかなり大きく増大するらしいことが観測されていた．

ルオ–サルナックは，1994 年の共著論文[*5)]において，数論的な場合に，次の事実を証明した．

$$\frac{\sqrt{\lambda}}{\log\lambda} \ll L \ll \sqrt{\lambda} \implies \overline{\Sigma}^2(\lambda, L) \gg \frac{\sqrt{\lambda}}{(\log\lambda)^2}.$$

これは，数値計算によって観測されてきた数論的群のスペクトルのばらつき具合が大きいという現象を，理論的に支持するものであった．

2.2 固有関数 $\boldsymbol{u_\lambda}$ の $\boldsymbol{L^\infty}$-ノルム

L^∞-ノルムの $\lambda \to \infty$ における増大度を評価する問題は，その究極的な評価（L^∞-予想）がリーマン・ゼータ関数のリンデレーフ予想[*6)]を含むことなどから重要である．イバニッチ–サルナックは共著論文[*7)]において，数論的な場合に，ヘッケ作用素の同時固有関数であるような u_λ に対し，

$$\|u_\lambda\|_\infty = O(\lambda^{\frac{5}{24}+\varepsilon}) \qquad (\lambda \to \infty,\ \forall\varepsilon > 0)$$

を証明した．これは，自明な評価 $O(\lambda^{\frac{1}{4}})$ を初めて改良した結果であり，群の数論性を特徴づける結果である．

後に小山[*8)]は，彼らの結果を 3 次元数論的双曲多様体に拡張し，$n = 3$ のときの自明な評価 $\|u_\lambda\|_\infty = O(\lambda^{\frac{1}{2}})$ を改良した次の結果を得た．

$$\|u_\lambda\|_\infty = O(\lambda^{\frac{37}{76}+\varepsilon}) \qquad (\lambda \to \infty,\ \forall\varepsilon > 0).$$

*5) W. Luo and P. Sarnak: "Number variance for arithmetic hyperbolic surfaces", *Comm. Math. Phys.* **161** (1994) 419–432.

*6) 文献 1) 第 10 章に初心者向けの解説がある．

*7) H. Iwaniec and P. Sarnak: "L^∞ norms of eigenfunctions of arithmetic surfaces", *Ann. of Math.* (2) **141** (1995) 301–320.

*8) S. Koyama: "L^∞-norms on eigenfunctions for arithmetic hyperbolic 3-manifolds", *Duke Math. J.* **77** (1995) 799–817.

2.3 固有関数 $u_\lambda(z)$ の値分布

一部の物理学者が抱いた夢については1節で説明したが，このとき彼らが観察した黒い図形はスカーリング (scarring) と呼ばれる．その夢を打ち砕いた数論的量子カオスの定理は，ルドニック−サルナックの共著論文*9)にある．彼らはまず，スカーリングが集合 S 上に発生するという現象を，数学的に厳密に定義した．少し簡略化して述べよう．

関数列 $\{u\}$ の部分列で，$\lambda \to \infty$ である ν に収束し $\emptyset \neq \mathrm{supp}(\nu) \subset S$ となるようなものがあるとき，u は S 上にスカーリングを持つという．

彼らが示した定理は，2または3次元の数論的多様体は，点または閉測地線の有限個の合併集合上にスカーリングを持ち得ないということである．

ここで示されたのは数論的多様体という特殊な対象であり，一般の多様体に対してはスカーリングが発生するのだとの主張も，理屈の上では依然としてあり得る．だが，数論的な場合の数値計算でも，先ほどと同様に意味ありげな黒い図形が観察される．それらに意味がないことは彼らの定理により証明されているわけだから，スカーリングを信奉する物理学者の主張に説得力がなくなってしまったのだ．この定理が世に出て以来，スカーリングに意義を見出そうとする動きはなくなった．この結果は，数論的量子カオスが一般の量子カオスの方向性に決定的な影響を与えた例である．

さらに，図の黒い部分が測地線に収束しないばかりでなく，限りなく均一に分布する状態になる性質を量子エルゴード性と言う．これは量子カオスの中心的な問題であるので，次節で別途解説する．

3. 量子エルゴード性

2.3節の現象を突き詰めたのが，量子エルゴード性である．多様体 M が**量子エルゴード的**であるとは，任意のジョルダン可測集合 A と関数 $f \in L^1(M)$ に対し，次式が成り立つことである．

*9) Z. Rudnick and P. Sarnak: “The behaviour of eigenstates of arithmetic hyperbolic manifolds”, *Comm. Math. Phys.* **161** (1994) 195–213.

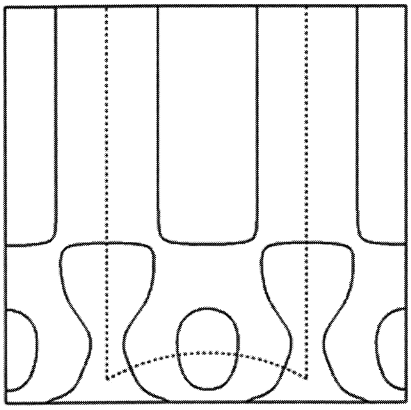


図 4　$u_\lambda(z)=0$ なる z（λ が小さい場合）[*10].

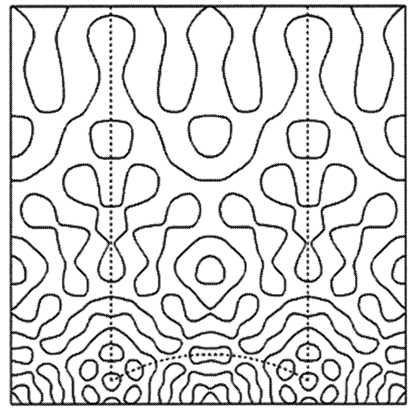


図 5　$u_\lambda(z)=0$ なる z（λ が中程度の場合）[*10].

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_A f(z)|u_\lambda(z)|^2dz=\int_A f(z)dz. \quad (3)$$

この定義は「固有値の増大に伴い，固有関数が一様分布する」ことを表す．それは，先ほどの有界領域の図で言えば，黒い部分が細かくなり，至るところに分布することである．定義 (3) がなぜそう解釈できるのかについては文献 1) 第 13 章で詳しく説明した．

数論の側からみれば，Ω として $SL(2,\mathbb{Z})$ の基本領域など，数論的多様体を取った場合により興味がある．以下に，ヘジェル–ラックナーによる計算結果[*10]を挙げる．

図 4〜6 は，いずれも $SL(2,\mathbb{Z})$ に対するマース波動形式 u_λ に対し，$u_\lambda(z)=0$ を満たす $z\in H$ の集合を表す．図の外枠は，上半平面内の長方形

$$-1<\mathrm{Re}(z)<1,\quad 0.75<\mathrm{Im}(z)<2.75$$

である．内側に見える点線は，基本領域$SL(2,\mathbb{Z})\backslash H$ を次のように選んだときの境界である：

$$\left\{z=x+iy\in H \;\middle|\; -\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2},\ |z|>1\right\}$$
$$\cup\left\{z=x+iy\in H \;\middle|\; |z|=1,\quad 0\le x\le\frac{1}{2}\right\}.$$

図 4 は小さめの固有値 $\lambda=190.6213$,
図 5 は中程度の固有値 $\lambda=2297.2070$,

*10) D. A. Hejhal and B. N. Rackner "On the topography of Maass waveforms for PSL(2, ℤ)", *Experiment. Math.* Volume **1** (1992) 275–305 より引用.

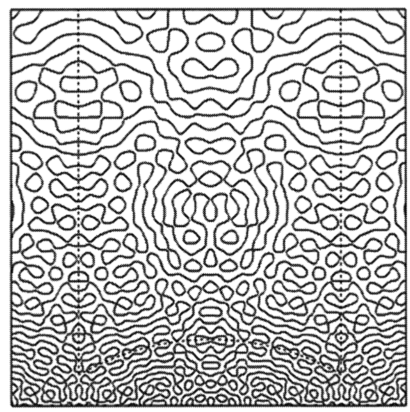


図 6　$u_\lambda(z)=0$ なる z（λ が大きい場合）[*10].

図 6 は大きめの固有値 $\lambda=15712.2658$,
に対する固有関数 u_λ について表している．

これをみると一目瞭然であるように，固有値が小さい方が曲線は緩やかであり，固有値が大きくなるにつれて次第に入り組んだ形状となる．これは固有関数の値の変動が，固有値が大きいほど激しく，急激で凹凸も多いことを示している．したがって，これらの図は量子エルゴード性を表している．

量子エルゴード性は，連続スペクトルについても定義できる．ただしその場合，定義式 (3) の極限は無限大に発散してしまうので，定義を修正する必要がある．$\lambda=\frac{1}{4}+r^2$ が連続スペクトルの場合，$|u_\lambda(z)|^2=\left|E\left(z,\frac{1}{2}+ir\right)\right|^2$ を掛けた積分が

元の積分に比例することを，量子エルゴード性の定義とする．

連続スペクトルの量子エルゴード性は，ルオとサルナック[*11]により1995年に証明された．それは，保型L関数の評価の目覚ましい応用であった．数論と幾何学，そして量子力学の主要概念が，解析学の手法を用いて一同に会する様子は圧巻である．これについては，文献1)第14章で詳しく述べた．

その後，量子エルゴード性は，多くの研究者により様々な形で一般化されている．アイゼンシュタイン級数に対しては，小山[*12]がビアンキ群$SL(2,O_K)$ (O_Kは類数1の虚2次体Kの整数環）の場合に証明した．

一方，マースのカスプ形式の場合の証明に初めて成功したのはリンデンシュトラウス[*13]である．彼は，専門であるエルゴード理論を量子エルゴード性を含むいくつかの問題に応用し，未解決問題を解決に導いた．リンデンシュトラウスはこの一連の業績により，昨年フィールズ賞を受賞した．リンデンシュトラウスが証明したのは，基本領域がコンパクトであるような$\Gamma \subset SL(2,\mathbb{R})$に対してであった．この場合，連続スペクトルは存在しないので，カスプ形式のみが問題となる．

リンデンシュトラウスがどうやって量子エルゴード性を示し，フィールズ賞に値する研究を成し遂げたのかについては，文献1)の第14章に概略を述べた．彼は，群の階数が2以上の場合にのみ成立する測度剛性定理を用いたのだが，$SL(2,\mathbb{R})$が階数1であることの困難を，独自の着想で乗り越えたのだ．ただし，量子エルゴード性を満たさないような例外集合が無限遠点に逃げてしまう現象(mass escape）を回避できなかったため，証明が完遂したのはコンパクトなMのみであった．

したがって，リンデンシュトラウスの後，主な未解決問題として残ったのは，基本領域が非コンパクトな場合（例えば$SL(2,\mathbb{Z})$）のカスプ形式だった．この場合の量子エルゴード性は，サンダララジャン(2009年）により証明された．彼は，リンデンシュトラウスの方法を改良し，mass escapeを回避する方法を考案したのである．このサンダララジャンの研究もまた画期的とされており，アメリカ数学研究所のホームページ[*14]には "This is one of the best theorems of the year." というサルナックの言葉が掲載されている．

他方，別の観点により，量子エルゴード性の概念自体を一般化する試みもある．文献1)第14章にあるように，アイゼンシュタイン級数の量子エルゴード性の証明においては，マース波動形式の保型L関数の凸評価の改良が鍵である．しかし，保型L関数の評価には様々な側面がある．保型形式には様々なパラメータがあるからだ．

元来の量子エルゴード性の証明に関する保型L関数の凸評価は，$s=\frac{1}{2}+it$と置いて$L(s,u_j)=O(t^{\frac{1}{2}})$ $(t\to\infty)$であったが，これはλ_jを固定してtを変化させたものだ．逆にtを固定して$\lambda_j\to\infty$とすれば，別の凸評価が得られる．文献1)第9章にあるように，凸評価とは関数等式のみから得られる自明な評価だから，関数等式内の別の変数に関して同様の処理を行えば，新しい変数に関する同種の評価を得ることが可能なのだ．

保型L関数については，t, λ_j以外にも，合同部分群$\Gamma(N)$のレベルNという側面がある．それに対応するマース波動形式の値分布の極限的な均一性が成り立つと予想される．

小山[*15]は，特殊な合同部分群である$\Gamma_0(p)$ (pは素数）のアイゼンシュタイン級数に対し，$p\to\infty$

*11) W. Luo and P. Sarnak: "Quantum ergodicity of Eigenfunctions on $PSL_2(\mathbb{Z})/H_2$", *Publications Mathematiques de L'IHES* **81** (1995) 207–237.

*12) S. Koyama: "Quantum ergodicity of Eisenstein series for the Picard manifold", *Communications in Mathematical Physics* **215** (2000) 477–486.

*13) E. Lindenstrauss: "Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity", *Ann. of Math.* **(2) 163** (2006), no. 1, 165–219.

*14) http://www.aimath.org/news/que/ このホームページでは，1994年に量子エルゴード性予想を初めて提起した論文の共著者であるサルナックとルドニックの2名それぞれによる，サンダララジャンの業績に関する解説がある．

*15) S. Koyama: "Equidistribution of Eisenstein series in the level aspect", *Comm. Math. Phys.* **289** (2009), no. 3, 1131–1150.

とした際に，量子エルゴード性に類似の性質が成り立つことを証明した．すなわち，ある種の数論的多様体の系列に関する波動形式の値分布は，極限的に一様性を持つ．この種の結果が今後より多くの系列に対して一般化されれば，興味深い．

また，こうした別の側面で量子エルゴード性が成立するという事実から，多様体からグラフへの一般化の可能性も生ずる．$SL(2,\mathbb{Z})$ の正標数類似である $GL(2,\mathbb{F}_p[T])$（$\mathbb{F}_p[T]$ は p 元体 $\mathbb{F}_p$ 上の一変数多項式環）の場合，基本領域は数論的無限グラフ（ラマヌジャン・グラフ）となるが，λ は有界となるので極限を取るという概念が存在せず，元の意味での量子エルゴード性は存在しない．しかし，固有値以外のパラメータは一般に有界でないので，別の側面に関して量子エルゴード性の類似を考えることができる．小山–リー（2009 年）は，$GL(2,\mathbb{F}_p[T])$ の合同部分群 $\Gamma_0(A)$（A は $\mathbb{F}_p[T]$ 内の既約多項式）の系列において，$\deg A \to \infty$ としたときに，アイゼンシュタイン級数の量子エルゴード性が，マース・カスプ形式の凸評価の改善に帰着されることを証明した．数論的グラフの場合も，多様体と類似の状況が成り立っていそうなのだ．

今後，さらに多くの多様体に関し，様々な側面からの研究が待たれる．若い人々の参加を期待したい．

参考文献

1) 小山信也・著『素数からゼータへ，そしてカオスへ』（日本評論社）2010 年 12 月.

2) 黒川信重，小山信也・共著『リーマン予想のこれまでとこれから』（日本評論社）2009 年 12 月.

（こやま・しんや，東洋大学理工学部）

有限体上の Hasse–Weil ゼータ関数の特殊値

斎藤　秀司

1. Hasse–Weil ゼータ関数の特殊値

X を有限体あるいは整数環 $\mathbb{Z}$ 上の有限型なスキームとし，$X_{(0)}$ を X の閉点全体の集合とする．$x \in X_{(0)}$ にたいしその剰余体 $\kappa(x)$ は有限体である．その位数を $N(x)$ で表す．X の **Hasse–Weil ゼータ関数**が，$\mathrm{Re}(s) > \dim(X)$ で絶対収束する級数

$$\zeta(X,s) = \prod_{x \in X_{(0)}} (1 - N(x)^{-s})^{-1} \quad (s \in \mathbb{C}) \tag{1}$$

により定義される．例えば，$X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ なら $\zeta(X,s)$ はリーマンゼータ関数である．もっと一般に有限次代数体 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ にたいし $X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ とすれば $\zeta(X,s)$ はデデキントのゼータ関数である．

X が有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の多様体の場合には

$$\zeta(X,s) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} |X(\mathbb{F}_{q^n})| \frac{q^{-ns}}{n}\right) \tag{2}$$

と書きなおすことができる．ここで $X(\mathbb{F}_{q^n})$ は X の $\mathbb{F}_{q^n}$-有理点全体の集合である．つまり $\zeta(X,s)$ は X の $\mathbb{F}_{q^n}$-有理点の個数を数えることにより計算できるわけである．X は $\mathbb{F}_q$-係数の方程式系で定義されるので，$\zeta(X,s)$ の計算は方程式の解の個数の計算に帰着できることになる．

本稿で解説するのは，X が有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で滑らかな多様体の場合の $\zeta(X,s)$ の**特殊値**

$$\zeta(X,r)^* := \lim_{s \to r} \zeta(X,s) \cdot (1 - q^{r-s})^{-\rho_X^r} \tag{3}$$

についてである．ここで r は整数で

$$\rho_X^r = \mathrm{ord}_{s=r} \zeta(X,s) \tag{4}$$

は $\zeta(X,s)$ の $s = r$ での位数である．これらは数論幾何学における重要な研究対象で，これまで多くの研究がなされている．本稿の目標はこれを概観することである．

以下，アーベル群 M と自然数 n および素数 ℓ にたいし，$M[n] \subset M$ は n 倍で消える元たちのなす部分群，$M\{\ell\} \subset M$ は ℓ べき倍で消える元たちのなす部分群を表す．また M_{tors} で M のねじれ部分を表す．

さてゼータ関数の特殊値の話で避けては通れないのが解析的類数公式である．有限次代数体 K のデデキントのゼータ関数 $\zeta(X,s)$ $(X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K))$ にたいし，

$$\begin{aligned} \zeta(X,0)^* &= \lim_{s \to 0} \zeta(X,s) \cdot s^{-\rho_0} \\ &= -\frac{|Cl(K)| \cdot R_K}{|(\mathcal{O}_K^\times)_{\mathrm{tors}}|} \end{aligned} \tag{5}$$

が成り立つ．ここで，ρ_0 は $\mathcal{O}_K$ の単数群 $\mathcal{O}_K^\times$ の階数，$Cl(K)$ は K のイデアル類群，R_K はディリクレの単数基準である．また定義より $(\mathcal{O}_K^\times)_{\mathrm{tors}}$ は K に含まれる 1 のべき乗根全体のなす群であることに注意する．

これの幾何学的類似として，有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で滑らかな曲線 X にたいし

$$\zeta(X,0)^* = -\frac{|Jac_X(\mathbb{F}_q)|}{q-1} \tag{6}$$

が成り立つ．ここで Jac_X は X のヤコビ多様体，$Jac_X(\mathbb{F}_q)$ はその $\mathbb{F}_q$-有理点全体がなすアーベル群である．$Jac_X(\mathbb{F}_q)$ は (5) における $Cl(K)$ の幾何学的類似物である．また (6) の右辺の分母の $q-1$ は

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathbb{F}_q$$

の単数群の位数であることに注意すれば，二つの式の類似性が明らかになる（$X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ なら $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_K$ である）．式 (6) において単数基

準 R_K の類似物が現れないのは，式に登場する群たちが有限群であることが理由である．式 (5) には一般には有限とは限らない群 $\mathcal{O}_K^\times$ が現れるので，これを特殊値の表示に取り込むために R_K が必要となる．

式 (6) を二つの方向に一般化することが問題である．一つは X を高次元の多様体に一般化することである．もう一つは一般の整数 r にたいする $\zeta(X,r)^*$ の表示を求めることである．

2. $\zeta(X,s)$ の行列式表示と Tate 予想

X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で滑らかな多様体とする．$\mathbb{F}_q$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{F}}_q$ を固定し，$\overline{X} = X \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q} \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ とおく．以下，$\ell \neq \mathrm{ch}(\mathbb{F}_q)$ を素数とし，$Y = X$ あるいは $Y = \overline{X}$ の **ℓ-進エタールコホモロジー**

$$H^i_{\text{ét}}(Y, \mathbb{Z}_\ell(r)) = \varprojlim_n H^i_{\text{ét}}(Y, \mu_{\ell^n}^{\otimes r}),$$

$$H^i_{\text{ét}}(Y, \mathbb{Q}_\ell(r)) = H^i_{\text{ét}}(Y, \mathbb{Z}_\ell(r)) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

が用いられる．ここで $\mu_{\ell^n}^{\otimes r}$ は 1 の ℓ^n-乗根のエタール層 μ_{ℓ^n} の r 回テンソルである．フロベニウス元 $F \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ が $H^i_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)$ 上に引き起こす線型自己同型 F^* の固有多項式

$$P^i_X(t) := \det\left(1 - F^* \cdot t \;\middle|\; H^i_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell)\right)$$

を考える．定義よりこれは定数項が 1 の $\mathbb{Q}_\ell$-係数の多項式である．Grothendieck[Gr]，Deligne[D]，Katz–Messing[KM] より次の事実が知られている．

定理 2.1 (1) $P^i_X(t)$ は ℓ に依存しない整数係数多項式である．
(2) $P^i_X(\alpha) = 0$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ とすれば，$|\alpha| = q^{-i/2}$．
(3) $\zeta(X,s) = \prod_{0 \le i \le 2d} P^i_X(q^{-s})^{(-1)^{i+1}}$．

注意 2.2 上の定理は $\zeta(X,s)$ の有理性，つまり $\mathbb{Q}$ 係数の有理式 $P(t)$ にたいし $\zeta(X,s) = P(q^{-s})$ とかけるという事実を含んでいる．この事実を最初に示したのは Dwork[Dw] である．

定理 2.1 から従う事実を説明する．まず $r \in \mathbb{Z}$ にたいし $\zeta(X,r)^* \in \mathbb{Q}^\times$ である．またエタールコホモロジーにたいするポアンカレ双対定理を用いて等式

$$\zeta(X,r)^* = \zeta(X, d-r)^* \cdot q^{\chi(X)(r-d/2)} \qquad (d = \dim(X))$$

が従う．ここで $\chi(X)$ は X の Euler–Poincaré 標数である．従って $\zeta(X,r)$ を記述する問題は $r \le d/2$ の場合に帰着される．一方，(4) で定義された ρ^r_X について不等号

$$\rho^r_X \ge \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^{2r}_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(r))^G \quad (G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)) \tag{7}$$

が成立し，等号が成立するための必要十分条件が次で与えられる．

SS(X,r,ℓ): $H^{2r}_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(r))$ に作用する F^* の最小多項式は 1 を重根に持たない．

次に **Tate 予想**を述べよう．$A^r(X, \mathbb{Q}_\ell) \subset H^{2r}_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(r))$ を X の余次元 r の部分多様体 $W \subset X$ のコホモロジー類 $cl_X(W) \in H^{2r}_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(r))$ により生成される $\mathbb{Q}_\ell$-部分空間とする．このとき

$$A^r(X, \mathbb{Q}_\ell) \subset H^{2r}_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell(r))^G$$

が成り立つので次の不等号を得る．

$$\rho^r_X \ge \dim_{\mathbb{Q}_\ell} A^r(X, \mathbb{Q}_\ell). \tag{8}$$

ここで次の条件を考えよう．

T(X,r,ℓ): (8) で等号が成立する．

明らかに $\mathbf{T}(X,r,\ell) \Rightarrow \mathbf{SS}(X,r,\ell)$ である．

予想 2.3 (Tate) 全ての素数 ℓ にたいし $\mathbf{T}(X,r,\ell)$ が成り立つ．

3. エタールコホモロジーによる表示

Milne[M1] は定理 2.1 から $\zeta(X,r)^*$ の**エタールコホモロジー**による表示式を導いた．これを解説しよう．以下，

$$H^i_{\text{ét}}(X, \hat{\mathbb{Z}}(r)) = \prod_{\text{all } \ell} H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell(r))$$

とおく．ここで，$H^i_{\text{ét}}(X, \mathbb{Z}_\ell(r))$ は $\ell \neq p := \mathrm{ch}(\mathbb{F}_q)$ なら前節の始めに定義したものである．$\ell = p$ の場合の定義は省略する．エタールコホモロジーに関する基本的事実，Weil 予想（Deligne の定理 [D]），および Gabber[Ga] の定理から次の事実が従う．

定理 3.1 X は有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で滑らかな多様体であるとする．

(1) $H^i_{\text{ét}}(X,\hat{\mathbb{Z}}(r))$ は $\hat{\mathbb{Z}}$ 上有限生成である．
(2) $i \neq 2r, 2r+1$ なら $H^i_{\text{ét}}(X,\hat{\mathbb{Z}}(r))$ は有限である．
(3) $i \neq 2r+1$ なら $H^i_{\text{ét}}(X,\hat{\mathbb{Z}}(r))_{\text{tors}}$ は有限である．

Milne の定理を述べるための準備をしよう．同型

$$H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q),\hat{\mathbb{Z}}) \simeq \mathrm{Hom}_{cont}(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q),\hat{\mathbb{Z}}) \simeq \hat{\mathbb{Z}}$$

が成り立つ．ここで Hom_{cont} は連続準同型全体を表す．2 番目の同型は連続準同型 χ を $\chi(F) \in \hat{\mathbb{Z}}$（$F \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ はフロベニウス元）を対応させる写像である．上の同型により右辺の $1 \in \hat{\mathbb{Z}}$ に対応する左辺の元

$$e \in H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q),\hat{\mathbb{Z}})$$

が定義される．$\mathbb{F}_q$ 上の射影的で滑らかな多様体 X にたいし写像

$$\epsilon_X : H^{2r}_{\text{ét}}(X,\hat{\mathbb{Z}}) \xrightarrow{\cup e_X} H^{2r+1}_{\text{ét}}(X,\hat{\mathbb{Z}})$$

が e の $H^1_{\text{ét}}(X,\hat{\mathbb{Z}})$ への引き戻し e_X とのカップ積として定義される．

定理 3.2 （[M1], Th.0.1) $d = \dim(X)$ とする．このとき，次の条件は同値である．

(*i*) $H^{2r+1}_{\text{ét}}(X,\hat{\mathbb{Z}}(r))_{\text{tors}}$, $\mathrm{Ker}(\epsilon_X)$, $\mathrm{Coker}(\epsilon_X)$ は全て有限である．
(*ii*) 全ての素数 ℓ にたいし，$\mathbf{SS}(X,r,\ell)$ が成り立つ．

さらにこれらの条件の下で次の等式が成り立つ．

$$\zeta(X,r)^* = \pm q^{\chi(X,\mathcal{O}_X,r)} \cdot \prod_{i\neq 2r,2r+1} \left|H^i_{\text{ét}}(X,\hat{\mathbb{Z}}(r))_{\text{tors}}\right|^{(-1)^i} \cdot \frac{\left|\mathrm{Ker}(\epsilon_X)\right|}{\left|\mathrm{Coker}(\epsilon_X)\right|} \tag{9}$$

ここで

$$\chi(X,\mathcal{O}_X,r) = \sum_{0\leq i\leq r,\ 0\leq j\leq d} (-1)^{i+j}(r-i)\cdot \dim H^j(X,\Omega^i_X).$$

4. モチフィックコホモロジー

定理 3.2 はゼータ関数の特殊値を記述する公式を「数論的な指数定理」として解釈することを示唆している．一般に指数定理とは次の形をしている．

指数（解析的不変量）
＝ 特性類（例えば，オイラー標数）

式 (9) において，$\zeta(X,r)^*$ を指数と考え，右辺を特性類と考えるのである．しかし右辺に現れる群が $\hat{\mathbb{Z}}$ 上の加群であるのは不自然な感が否めない．これを $\mathbb{Z}$ 上の有限生成加群に置き換えることはできないのだろうか？ **モチフィックコホモロジー**（あるいはその哲学）は，上の問いの探求から生まれたものともいえる．後で説明するように，適当な条件をみたすスキーム X と自然数 $i, r \in \mathbb{N}$ にたいしモチフィックコホモロジー

$$H^i_M(X,\mathbb{Z}(r))$$

が定義される．$X = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$（$K$ は有限次代数体）の場合には

$$H^i_M(X,\mathbb{Z}(1)) \begin{cases} \mathcal{O}_K^\times & (i=1) \\ Cl(K) & (i=2) \\ 0 & (i \neq 0,1) \end{cases}$$

が成り立つ．よって解析的類数公式 (5) が

$$\zeta(X,0)^* = -\prod_i \left|H^i_M(X,\mathbb{Z}(1))_{\text{tors}}\right|^{(-1)^i} \cdot R_K \tag{10}$$

と書き換えられる．

モチフィックコホモロジーには二つの構成法が知られている．一つは Voevodsky によるコホモロジー論的な構成法で，モチーフの導来圏 $DM(k)$ を構成し，モチフィックコホモロジーを $DM(k)$ における射の空間として定義するものである．ここではこれに関する説明は省略し，**Bloch の高次チャウ群**（[B]）を用いた構成を説明する．一般に，体またはデデキント環上有限型なスキーム X にたいし Bloch の高次チャウ群 $\mathrm{CH}^r(X,q)$ が定義される（後で定義を述べる）．$q=0$ の場合

$$\mathrm{CH}^r(X,0) = \mathrm{CH}^r(X) \tag{11}$$

が成り立つ．ただし右辺は X の余次元 r のチャウ群

（X 上の余次元 r の代数的サイクルの有理同値類たちのなす群）である．

定義 4.1　体またはデデキント環上有限型な正則なスキーム X にたいし

$$H^i_M(X,\mathbb{Z}(r)) = \mathrm{CH}^r(X, 2r-i)$$

とおき，X のモチフィックコホモロジーと定義する．

モチフィックコホモロジーにたいし次の予想は基本的である．

予想 4.2　X を有限体あるいは整数環上の有限型な正則スキームとすると $H^i_M(X,\mathbb{Z}(r))$ は $\mathbb{Z}$ 上有限生成な加群である．

この予想と式 (10) から見てモチフィックコホモロジーを使って上述の「数論的な指数定理」を実現することを期待するのは自然である．残念ながらこの期待は修正を余儀なくされることになる（後述）．

Bloch の高次チャウ群の定義は位相空間の特異コホモロジーとの類似を辿ることができる．そこで位相空間 X の特異ホモロジー群

$$H_q(X,\mathbb{Z}) := H_q(s(X,\bullet))$$

の定義を復習しておこう．ここで $s(X,\bullet)$ は特異チェイン複体と呼ばれるアーベル群の複体

$$\cdots \to s(X,q) \xrightarrow{\partial} s(X,q-1) \xrightarrow{\partial} \cdots \to s(X,0)$$

で，その次数 q の項は

$$s(X,q) = \bigoplus_{\Gamma} \mathbb{Z}[\Gamma]$$

（Γ はすべての連続写像 $\Delta^q_{top} \to X$ をわたる）

で与えられる．ここで

$$\Delta^q_{top} = \left\{ (x_0, x_1, \cdots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \;\middle|\; \sum_{0\leqq i\leqq q} x_i = 1,\ x_i \geqq 0 \right\}$$

は位相的特異単体で，境界写像 ∂ は Δ^q_{top} の面への制限写像の交代和である．

Bloch の高次チャウ群の定義は，位相空間の特異ホモロジー群の代数的類似を辿る．位相的特異単体 Δ^q_{top} の代数的類似は

$$\Delta^q = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{Z}[t_0,\cdots,t_q]\Big/\left(\sum_{i=0}^{q} t_i - 1\right)\right)$$

で，$\Delta^s = \{t_{i_1} = \cdots = t_{i_{q-s}} = 0\} \subset \Delta^q$ がその面である．$s(X,q)$ の類似は $X\times\Delta^q$ 上の代数的サイクルの空間

$$z^r(X,q) = \bigoplus_{\Gamma\subset X\times\Delta^q} \mathbb{Z}[\Gamma]$$

である．ここで Γ は $X\times\Delta^q$ 上の余次元 r の整な閉部分スキームですべての面 $\Delta^s\subset\Delta^q$ と正しく交わるもの全体をわたる．気持ちとしては，Γ としてスキームの射 $f:\Delta^q\to X$ を考えたいところだが，これでは正しいコホモロジー群を生み出すことはできない（射 f のグラフを考えれば $X\times\Delta^q$ 上の代数的サイクルと見られるが，射のグラフだけでは十分でない）．

これから，位相空間の特異チェイン複体の類似である**サイクル複体**

$$z^r(X,\bullet) : \cdots \to z^r(X,q) \xrightarrow{\partial} z^r(X,q-1) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} z^r(X,0) \tag{12}$$

が生じる．Bloch の高次チャウ群は，サイクル複体のホモロジー群

$$\mathrm{CH}^r(X,q) := H_q\big(z^r(X,\bullet)\big)$$

として定義される．定義 4.1 より X のモチフィックコホモロジーが

$$H^i_M(X,\mathbb{Z}(r)) = H_{2r-i}\big(z^r(X,\bullet)\big) \tag{13}$$

と定義される．また自然数 n にたいし有限係数のモチフィックコホモロジーが

$$H^i_M(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) = H_{2r-i}\big(z^r(X,\bullet)\otimes\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\big) \tag{14}$$

と定義される．定義より直ちに次の完全系列が従う．

$$0 \to H^i_M(X,\mathbb{Z}(r))/n \to H^i_M(X,\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \to H^{i+1}_M(X,\mathbb{Z}(r))[n] \to 0 \tag{15}$$

5. モチフィックコホモロジーによる表示

定理 3.2 より「数論的な指数定理」をモチフィックコホモロジーを用いて実現するためには，モチフィックコホモロジーとエタールコホモロジーを比較する必

要がある．Bloch[B] と Geisser–Levine[GL] は，有限係数のモチフィックコホモロジーからエタールコホモロジーへの**サイクル写像**

$$\rho_X^{i,r} : H_M^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)) \to H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r))$$

を構成した．ここで X は体 k 上の滑らかな多様体で，右辺のエタールコホモロジーの係数 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}(r)$ は，$(n, \mathrm{ch}(k)) = 1$ なら $\mu_n^{\otimes r}$ である．$(n, \mathrm{ch}(k)) \neq 1$ の場合の定義は省略する．モチフィックコホモロジーとエタールコホモロジーは出所が全く違うだけにこれらを比較するのは容易ではない．これに関して次の二つの結果が知られている．

定理 5.1 $\rho_X^{i,r}$ は $i \leq r$ にたいし同型，$i = r+1$ にたいし単射である．

上の定理は，Geisser–Levine の定理（[GL]）および Rost と Voevodsky により証明された Bloch–加藤予想からの帰結である．

以下では X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で滑らかな多様体とする．

定理 5.2 $d = \dim(X)$ とする．

(1) $r > d$ なら全ての i にたいし $\rho_X^{i,r}$ は同型である．

(2) $(n, \mathrm{ch}(\mathbb{F}_q)) = 1$ あるいは $d \leq 4$ を仮定する．このとき全ての i にたいし $\rho_X^{i,d}$ は同型である．

(1) は定理 5.1 からの帰結である（証明は [JS, Lemma 6.2] を参照）．(2) は定理 5.1 および Jannsen–Kerz–斎藤（[J], [JS], [KeS], [Sa]）により示された加藤予想からの帰結である．定理 3.2 と定理 5.2(2) から次の結果が導かれる．

系 5.3 全ての整数 i にたいし，$H_M^i(X, \mathbb{Z}(d))_{\mathrm{tors}}$ は p べき部分を除外すれば有限で，次の等式が p べき部分を無視して成り立つ

$$\zeta(X, 0)^* = \prod_{1 \leqq i \leqq 2d} \left| H_M^i(X, \mathbb{Z}(d))_{\mathrm{tors}} \right|^{(-1)^i}.$$

さらに，$d = \dim(X) \leqq 4$ なら上の事実は p べき部分を含めて成立する．

系 5.3 に単数基準 R_K の類似が登場しないのは，有限体上の射影的で滑らかな多様体 X のモチフィックコホモロジー $H_M^i(X, \mathbb{Z}(d))$ が $i = 2d$ を除いて有限群である（と予想される）ことに由来する．

系 5.3 を一般化して $\zeta(X,r)^*$ をモチフィックコホモロジーを用いて表せるのではないかというのは自然な期待である．しかしこれは不可能であることが次の Artin–Tate–Milne の結果（[T], [M3]）から示唆される．

以下，X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で滑らかな曲面とする．$\zeta(X,1)^*$ を記述するために，X の（コホモロジー論的）ブラウアー群と呼ばれる不変量

$$\mathrm{Br}(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$$

を導入する．ここで右辺は乗法群 $\mathbb{G}_m$ を係数とするエタールコホモロジーである．$\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Br}(X)_{\mathrm{tors}}$ であることに注意しておく．次に双線型写像

$$\begin{aligned}\langle\ ,\ \rangle\ :\ \mathrm{CH}^1(X) \times \mathrm{CH}^1(X)\ &\to\ \mathrm{CH}^2(X)\\ &=\ \mathrm{CH}_0(X) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}\end{aligned}$$

を考える．ここで最初の写像は，X 上の余次元 1 の代数的サイクルの間の交叉積で，deg は 0–サイクル上の次数写像を表す．これにたいし行列式

$$R_X = \det(\langle\ ,\ \rangle)$$

が定義される．一般に同じ階数 r をもつ有限生成加群 M, N と双線型形式

$$\langle\ ,\ \rangle\ :\ M \times N \to \mathbb{Z}$$

にたいしその行列式は

$$\det\big(\langle \alpha_i, \beta_j \rangle\big)_{1 \le i,j \le r}$$

で定義する．ここで $\alpha_i\ (1 \le i \le r)$ と $\beta_j\ (1 \le j \le r)$ はそれぞれ M/M_{tors} と N/N_{tors} の $\mathbb{Z}$-加群としての基底である．

定理 5.4 素数 ℓ にたいし次の条件は同値である．

(i) $\mathbf{T}(X, r, \ell)$.

(ii) $\mathrm{Br}(X)\{\ell\}$ は有限である．

また上の条件が一つの ℓ について成り立てば全ての ℓ について成り立つ．さらにこれらの条件の下で次が成り立つ．

$$\zeta(X,1)^* = \pm q^{\chi(X,\mathcal{O}_X)} \cdot \frac{\big|\mathrm{CH}^1(X)_{\mathrm{tors}}\big|^2}{(q-1)^2 \cdot R_X \cdot \big|\mathrm{Br}(X)\big|}. \tag{16}$$

ここで

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = \sum_{0 \le j \le 2} (-1)^j \dim H^j(X, \mathcal{O}_X).$$

式 (16) の右辺をモチフィックコホモロジーと関係づけてみよう．(11) より $\mathrm{CH}^1(X) = H^2_M(X, \mathbb{Z}(1))$ である．また $q-1$ は $H^1_M(X, \mathbb{Z}(1)) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times) = \mathbb{F}_q^\times$ の位数であることに注意する．しかし $\mathrm{Br}(X)$ はモチフィックコホモロジーとして解釈することができない．実際，これは次に登場する「**エタールモチフィックコホモロジー**」として解釈することができる．

6. エタールモチフィックコホモロジー

サイクル複体 (12)

$$\begin{aligned} z^r(X, \bullet)\ :\ \cdots \to z^r(X, q) \xrightarrow{\partial} z^r(X, q-1) \xrightarrow{\partial}\\ \cdots \xrightarrow{\partial} z^r(X, 0)\end{aligned}$$

を思い出そう．モチフィックコホモロジーはサイクル複体のホモロジー群

$$H^i_M(X, \mathbb{Z}(r)) = H_{2r-i}\big(z^r(X, \bullet)\big)$$

として定義される．ここで注意すべきは，

$$z^r(-, q)\ :\ U \to z^r(U, q) \quad (U \to X\ \text{エタール})$$

は X 上のエタール層であるという事実である．

定義 6.1 X 上のエタール層の複体 $\mathbb{Z}(r)^{\text{ét}}$ を

$$\begin{aligned} \cdots\ \to\ &\underset{\text{次数 } i}{z^r(-, 2r-i)}\\ \xrightarrow{\partial}\ &\underset{\text{次数 } i+1}{z^r(-, 2r-i-1)} \xrightarrow{\partial} \cdots\end{aligned}$$

で定義する．また上の複体で各項を X 上の Zariski 層とみた複体を $\mathbb{Z}(r)$ で表す．

以下，一般にアーベル圏 $\mathcal{A}$ にたいし $D^-(\mathcal{A})$ は，$\mathcal{A}$ の複体 $C^\bullet$ で条件：ある整数 N が存在して全ての $i > N$ にたいし $H^i(C^\bullet) = 0$，をみたすものたちのなす導来圏（複体のホモトピー圏を擬同型で局所化したもの）を表す．また $D^-(X_{\text{ét}})$ と $D^-(X_{Zar})$ は，それぞれ X 上のアーベル群のエタール層および Zarisiki 層の複体の導来圏を表す．$\mathbb{Z}(r)^{\text{ét}}$ と $\mathbb{Z}(r)$ はそれぞれ $D^-(X_{\text{ét}})$ と $D^-(X_{Zar})$ において考えることが多い．$r = 0, 1$ にたいしては次の事実が成り立つ．

定理 6.2 (1) $D^-(X_{Zar})$ において次の自然な同型が存在する．

$$\mathbb{Z}(0) \simeq \mathbb{Z}[0]\ (\text{定数層}),$$

$$\mathbb{Z}(1) \simeq \mathcal{O}_X^\times[-1]\ (\text{乗法群}).$$

(2) $D^-(X_{\text{ét}})$ において次の自然な同型が存在する．

$$\mathbb{Z}(0)^{\text{ét}} \simeq \mathbb{Z}[0] \text{ (定数層)},$$
$$\mathbb{Z}(1)^{\text{ét}} \simeq \mathbb{G}_m[-1] \text{ (乗法群)}.$$

定理 6.2 より次の同型が導かれる．

$$H^i_{M,\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(1)) \simeq \begin{cases} H^0_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_m) \simeq \mathbb{F}_q^\times \ (i=0), \\ H^1_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{CH}^1(X) \ (i=1), \\ H^2_{\text{ét}}(X,\mathbb{G}_m) \simeq \mathrm{Br}(X) \ (i=2). \end{cases}$$

よって Artin–Tate の公式 (16) の各項が X の $\mathbb{Z}(1)^{\text{ét}}$ を係数とするエタールコホモロジーとして解釈される．一方，次の定理が知られている（Bloch の高次 Chow 群の局所化定理という深い事実に基づくものである）．

定理 6.3 自然な写像

$$H^i_M(X,\mathbb{Z}(r)) := H_{2r-i}\big(z^r(X,\bullet)\big) = H^i(\Gamma(X,\mathbb{Z}(r))) \to H^i_{Zar}(X,\mathbb{Z}(r))$$

は同型である．ただし，右辺は X 上の Zariski 層の複体 $\mathbb{Z}(r)$ の（ハイパー）コホモロジーを表す．

上述の事実は次の定義の動機づけを与える．

定義 6.4 X のエタールモチフィックコホモロジーを

$$H^i_{M,\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(r)) = H^i_{\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(r)^{\text{ét}})$$

で定義する．ただし，右辺は X 上のエタール層の複体 $\mathbb{Z}(r)^{\text{ét}}$ の（ハイパー）コホモロジーを表す．

定理 6.3 より，モチフィックコホモロジーからエタールモチフィックコホモロジーへの自然な写像

$$H^i_M(X,\mathbb{Z}(r)) \to H^i_{M,\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(r))$$

が存在するが，一般には同型でないことが知られている．

$\zeta(X,r)^*$ の表示に（モチフィックコホモロジーではなく）エタールモチフィックコホモロジーを用いる必要性に最初に気付いたのは Lichtenbaum[L1] である．Milne[M2] は，Lichtenbaum の予想に基づいて，ある仮定の下に $\zeta(X,r)^*$ がエタールモチフィックコホモロジーを用いて表示されることを示した．しかしその表示式は込み入ったものになっている．その理由はエタールモチフィックコホモロジーが一般には有限生成な群でないことによる．本稿ではこの Milne の結果の解説は省略して，エタールモチフィックコホモロジーを改良したもう一つのモチフィックコホモロジーによる $\zeta(X,r)^*$ の表示ついて説明する．

7. Weil-エタールモチフィックコホモロジー

エタールモチフィックコホモロジーの改良版である **Weil-エタールモチフィックコホモロジー**を導入しよう．これは Lichtenbaum[L2] により導入された「Weil-エタール位相」という新しい（Grothendieck の意味での）位相を用いて定義される．Weil-エタールモチフィックコホモロジーは有限生成な群と予想され，この予想の下で $\zeta(X,r)^*$ の明快な表示式が得られる．

X を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で滑らかな多様体とし，$\overline{X} = X \times_{\mathrm{Spec}\mathbb{F}_q} \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ とおく．また $\mathbb{F}_q$ の絶対ガロア群を $G = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ とおく．前節で導入された X 上のエタール層の複体 $\mathbb{Z}(r)^{\text{ét}}$ を考える．これを $\overline{X}$ 上に引き戻して，その（ハイパー）エタールコホモロジーを計算する複体

$$\mathbb{R}\Gamma(\overline{X},\mathbb{Z}(r)^{\text{ét}}) \in D^-(Mod_G)$$

を考える．ここで，Mod_G は G-加群の圏を表し，$D^-(Mod_G)$ はその複体の導来圏を表す．さらにこれにたいし関手

$$\mathbb{R}\Gamma(G,-) : D^-(Mod_G) \to D^-(Ab)$$

（G-加群 M にたいし M^G を対応させる関手の導来関手．Ab はアーベル群の圏）を適用して得られる複体

$$\mathbb{R}\Gamma(G,\mathbb{R}\Gamma(\overline{X},\mathbb{Z}(r)^{\text{ét}})) \in D^-(Ab) \tag{17}$$

を考えれば，

$$H^i_{M,\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(r)) = H^i\big(\mathbb{R}\Gamma(G,\mathbb{R}\Gamma(\overline{X},\mathbb{Z}(r)^{\text{ét}}))\big)$$

が成り立つ．つまり複体 (17) のコホモロジーが，エタールモチフィックコホモロジーを計算する．

定義 7.1 (Lichtenbaum[L2]) $G^o \subset G$ をフロベニウス元 $F \in G$ で生成される部分群とする（抽象群としての同型 $G^o \simeq \mathbb{Z}$ が存在する）．

$$\mathbb{R}\Gamma(G^o,\mathbb{R}\Gamma(\overline{X},\mathbb{Z}(r)^{\text{ét}})) \in D^-(Ab)$$

を (17) において群 G を G^o に制限したものとする．X の Weil-エタールモチフィックコホモロジーを

$$H^i_W(X,\mathbb{Z}(r)) = H^i\left(\mathbb{R}\Gamma(G^o, \mathbb{R}\Gamma(\overline{X}, \mathbb{Z}(r)^{\text{ét}}))\right)$$

により定義する．定義より自然な写像

$$H^i_{M,\text{ét}}(X,\mathbb{Z}(r)) \to H^i_W(X,\mathbb{Z}(r)) \tag{18}$$

が存在する．

Bloch の高次 Chow 群上には交叉積

$$\mathrm{CH}^r(X,n) \times \mathrm{CH}^s(X,m) \to \mathrm{CH}^{r+s}(X,m+n)$$

が存在する（これは深い事実である）．$n=m=0$ の場合には，これは代数的サイクルの交叉積に一致する．これよりモチフィックコホモロジーの交叉積

$$H^i_M(X,\mathbb{Z}(r)) \times H^j_M(X,\mathbb{Z}(s)) \\ \to H^{i+j}_M(X,\mathbb{Z}(r+s)),$$

さらに Weil-エタールモチフィックコホモロジーの上の交叉積

$$H^i_W(X,\mathbb{Z}(r)) \otimes H^j_W(X,\mathbb{Z}(s)) \\ \to H^{i+j}_W(X,\mathbb{Z}(r+s))$$

が導かれる．一方，自然な写像 $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q)$ は写像

$$\deg : H^{2d}_W(X,\mathbb{Z}(d)) \to H^0_W(\mathrm{Spec}(\mathbb{F}_q),\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$$

を誘導する．これより双線型形式

$$\langle\ ,\ \rangle_W :\ H^{2r}_W(X,\mathbb{Z}(r)) \otimes H^{2(d-r)}_W(X,\mathbb{Z}(d-r)) \\ \to H^{2d}_W(X,\mathbb{Z}(d)) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

が誘導される．その行列式を $R^W_r(X) = \det\langle\ ,\ \rangle_W$ とおく．次の Geisser の定理は数論的指数定理を Weil-エタールモチフィックコホモロジーを用いて実現するものである．次の条件を考える．

L(X,r): 全ての i にたいし $H^i_W(X,\mathbb{Z}(r))$ は有限生成な群である．

定理 7.2 ([Ge1], Th.1.3) X は有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の射影的で滑らかな多様体であるとし，**L**(X,r) および **L**$(X,d-r)$ を仮定する．このとき次が成り立つ．

(1) $\rho^r_X = \mathrm{ord}_{s=r}\zeta(X,s)$ は $H^{2r}_W(X,\mathbb{Z}(r))$ の階数に等しい．

(2) 次の等式が成り立つ．

$$\zeta(X,r)^* \\ = \pm\frac{q^{\chi(X,\mathcal{O}_X,r)}}{R^W_r(X)} \cdot \prod_i \left|H^i_W(X,\mathbb{Z}(r))_{\text{tors}}\right|^{(-1)^i}$$

注意 7.3 Geisser は上の結果を X が有限体上の（射影的とも滑らかとも限らない）多様体の場合に拡張している（[Ge2] 参照）．

謝辞：この論説を執筆するにあたり多くの貴重なコメントをいただいた Geisser 氏と佐藤周友氏に感謝の意を表します．

参考文献

[B] S. Bloch, Algebraic cycles and higher algebraic *K*-theory, *Adv. Math.* **61** (1986), 267–304.

[D] P. Deligne, La conjecture de Weil II, *Publ. Math. IHES* **52** (1981), 313–428.

[Dw] B. Dwork, On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, *Amer. J. of Math.* **82** (1960), 631–648.

[Ga] O. Gabber, Sur la torsion dans la cohomologie ℓ-adique d'une variété, *C.R. Acad. Sc., Paris* **297** (1983), 179–182.

[Ge1] T. Geisser, Weil-étale cohomology over finite fields, *Math. Ann.* **330** (2004), 665–692.

[Ge2] T. Geisser, Arithmetic cohomology over finite fields and special values of ζ-functions, *Duke. Math. J.* **133** (2006), 27–57.

[Gr] A. Grothendieck, *Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L*, Séminaire Bourbaki 1964/1965 (No.279) Soc. Math. France, Paris. (in: Dix exposes sur la cohomologie des schemas, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1968).)

[GL] T. Geisser and M. Levine, The Bloch-Kato conjecture and a theorem of Suslin-Voevodsky, *J. Reine Angew.* **530** (2001), 55–103.

[J] U. Jannsen, Hasse principles for higher dimensional fields, http://arxiv.org/abs/0910.2803.

[JS] U. Jannsen and S. Saito, Kato conjecture and motivic cohomology over finite fields, http://arxiv.org/abs/0910.2815.

[K] D. Kohmoto, A generalization of the Artin–Tate formula for fourfolds, preprint.

[KeS] M. Kerz and S. Saito, Kato conjecture and motivic cohomology for arithmetic schemes, in preparation.

[KM] N. Katz and W. Messing, Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields, *Invent. Math.* **23** (1974), 73–77.

[L1] S. Lichtenbaum, Values of zeta-functions at nonnegative integers, In: Number theory, Noordwijkerhout, *Lecture Notes in Math.* **1068** (1984), 127–138.

[L2] S. Lichtenbaum, The Weil-etale topology on schemes over finite fields, *Compos. Math.* **141** (2005), 689–702.

[M1] J.S. Milne, Values of zeta-functions of varieties over finite fields, *Amer. J. Math.* **108** (1986), 297–

360.
[M2] J.S. Milne, Motivic chomology and values of zeta-functions, *Compo. Math.* **68** (1988), 59–102.
[M3] J.S. Milne, On a conjecture of Artin–Tate, *Ann. Math.* **102** (1975), 517–533.
[Ma] T. Matsusaka, The criteria for algebraic equivalence and the torsion group, *Amer. J. Math.* **79** (1957), 53–66.
[Sa] S. Saito, Recent progress on the Kato conjecture, in: Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology, *Developments in Math.* **18** (2010), 109–124.
[SS] S. Saito and K. Sato, A p-adic regulator map and finiteness results, to appear in *Documenta Math.*
[T] J. Tate, *On the conjecture of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog*, Séminaire Bourbaki 1965/1966 (No.306) (1995), 415–440, Soc. Math. France, Paris. (in: Dix exposes sur la cohomologie des schemas, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1968).)

（さいとう・しゅうじ，東京大学大学院数理科学研究科）

保型形式とゼータ

権　寧魯

1. 導入：リーマンゼータ

最も基本的なゼータであるリーマンゼータ関数は，$\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束するディリクレ級数

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p}\left(1-p^{-s}\right)^{-1} \qquad (1)$$

で定義される．無限積は素数 p 全体にわたり，$\zeta(s)$ の**オイラー積**と呼ばれている．リーマンは $\zeta(s)$ の解析接続の第二の証明でガンマ関数 $\Gamma(s)$ の積分表示を用いて，

$$\hat{\zeta}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s) \qquad (2)$$
$$= \int_1^{\infty}\psi(x)\Big(x^{\frac{s}{2}-1}+x^{\frac{1-s}{2}-1}\Big)\,dx - \frac{1}{s(1-s)}$$

を示した．$\psi(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2 x}$ であり，変換公式：$2\psi(x)+1 = x^{-\frac{1}{2}}\Big(2\psi(x^{-1})+1\Big)$ を用いるのがポイントであった．積分表示 (2) が示されれば，$\zeta(s)$ の $\mathbb{C}$ 全体への有理型解析接続と**関数等式** $\hat{\zeta}(1-s)=\hat{\zeta}(s)$ が得られる．先の変換公式はテータ変換公式と呼ばれ，テータ関数

$$\vartheta(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{2\pi i n^2 z}$$

が“重さ 1/2 の**保型形式**”であることに由来している．この小論では，上半平面上の保型形式に関連して現れるいくつかのゼータ関数を紹介し，特にそれらの解析的性質や関数等式について解説する．

2. 正則保型形式

上半平面上の正則保型形式の定義と例を述べる．$\mathbb{H} := \{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\,z>0\}$ を上半平面とする．

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ g=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{matrix} a,b,c,d\in\mathbb{R},\\ ad-bc=1\end{matrix}\right\}$$

は上半平面 $\mathbb{H}$ に一次分数変換 $g.z=\frac{az+b}{cz+d}\in\mathbb{H}$ で作用する．$SL(2,\mathbb{R})$ の離散部分群に対して保型形式は定義される．例えば，整数を成分とする部分群 $SL(2,\mathbb{Z})$ は $SL(2,\mathbb{R})$ の離散部分群になり，モジュラー群と呼ばれている．以下，$\Gamma_1 := SL(2,\mathbb{Z})$ とする．

定義 1　$k\in 2\mathbb{Z}$, $k\geq 0$ とする．正則関数 f: $\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ が，重さ k の Γ_1 に関する正則保型形式であるとは，以下の条件を満たすときをいう．

1. $f\Big(\dfrac{az+b}{cz+d}\Big)=(cz+d)^k f(z)$ がすべての $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_1$ で成立．（**保型性の条件**）

2. $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)\,q^n$, $q=\exp(2\pi i z)$ とフーリエ展開できる．
（“カスプ $i\infty$ で正則” $\Leftrightarrow$ q **の負べきがない**）

また，これらのなす $\mathbb{C}$ 上の線型空間を $M_k(\Gamma_1)$ とおく．さらに，$S_k(\Gamma_1) := \{f\in M_k(\Gamma_1)\mid a_0(f)=0\}$（つまり，フーリエ展開**の定数項がない**）とおき，$S_k(\Gamma_1)$ の元を重さ k

の Γ_1 に関する**カスプ形式**という．

補題 2 Γ_1 は $S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の 2 元で生成される．

$z \in \mathbb{H}$ に対して，$S.z = -1/z$, $T.z = z+1$ であるから特に，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, q^n$ の保型性をチェックするには $f(-1/z) = z^k f(z)$ が成り立つかどうかを調べればよいことになる．例を挙げよう．

定義 3（アイゼンスタイン級数） $k \in 2\mathbb{N}, k \geq 4$ とする．$z \in \mathbb{H}$ に対して，

$$E_k(z) := \frac{1}{2} \sum_{(c,d)=1} \frac{1}{(cz+d)^k}$$

を重さ k の正則アイゼンスタイン級数という．

アイゼンスタイン級数の定義から，

$$E_k(z+1) = E_k(z),\ E_k(-1/z) = z^k E_k(z)$$

が成り立つので，$E_k(z) \in M_k(\Gamma_1)$ である．さらに，次が知られている．

定理 4（$M_k(\Gamma_1)$ の構造） $k \geq 0$ を偶数とする．

1. $M_k(\Gamma_1) = \bigoplus_{4a+6b=k,\, a,b\geq 0} \mathbb{C} E_4^a E_6^b$.

2. $\dim_{\mathbb{C}} M_k(\Gamma_1) = \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right] + 1 & k \not\equiv 2 \ (12) \\ \left[\frac{k}{12}\right] & k \equiv 2 \ (12) \end{cases}$

3. $M_k(\Gamma_1) = S_k(\Gamma_1) \bigoplus \mathbb{C} E_k \quad (k \geq 4)$.

ラマヌジャンが重さ 12 のカスプ形式：

$$\Delta(z) := (E_4(z)^3 - E_6(z)^2)/1728 = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$$

のフーリエ係数 $\tau(n)$ を用いて，2 次のオイラー積を持つ L 関数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p (1 - \tau(p)\, p^{-s} + p^{11-2s})^{-1}$$

を考察したように，$S_k(\Gamma_1)$ の元 f から，$\mathbb{C}$ 全体で正則で，関数等式をもつ L 関数が構成できる．

定義 5（カスプ形式の L 関数） $f \in S_k(\Gamma_1)$ が $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\, q^n$ とフーリエ展開できるとき，

$$L(s,f) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)}{n^s} \quad \left(\mathrm{Re}\, s > \frac{k}{2} + 1\right)$$

により，f の L 関数を定義する．

（さらに，f が"ヘッケ作用素"の同時固有関数なら，$L(s,f)$ は 2 次のオイラー積を持つ．）

定理 6 $f(z) \in S_k(\Gamma)$ に対して，$L(s,f)$ は $\mathbb{C}$ 全体に正則な関数として解析接続されて，**関数等式**

$$\hat{L}(k-s, f) = (-1)^{k/2} \hat{L}(s,f)$$

を満たす．ここで，$\hat{L}(s,f) := (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(s,f)$ である．

（証明） メリン変換と**保型性**：$f(i/y) = (iy)^k f(iy)$ から得られる以下の積分表示を用いればよい．

$$\begin{aligned} \hat{L}(s,f) &= \int_0^{\infty} f(iy) y^s \frac{dy}{y} \\ &= \int_1^{\infty} f(iy) \Big((-1)^{k/2} y^{k-s} + y^s \Big) \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

ヘッケは上記定理の"逆"を証明した．

定理 7（ヘッケの逆定理） k を負でない偶数，$\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ を複素数列で，ある $c > 0$ に対して，$a(n) = O(n^c)$ とする．$\{a(n)\}$ に対して，$L(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}$，$\hat{L}(s) := (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(s)$, $f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a(n) q^n$，とおく．以下の条件を満たせば，$f \in S_k(\Gamma_1)$ となる．

(1) $\hat{L}(s)$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則で，以下の**関数等式**を満たす：$\hat{L}(k-s) = (-1)^{k/2} \hat{L}(s)$.

(2) $\hat{L}(s)$ は各垂直領域で有界．

保型性にとっても，関数等式が重要であることがわかる．

3. マース波動形式

上半平面上の保型形式には正則なもの以外に，**実解析的な保型形式**が存在し，これも重要である．この節では，$\Gamma = \Gamma_1$，または，$SL(2,\mathbb{R})$ の**ココンパクト離散部分群**とする．（Γ がココンパクト $\Leftrightarrow$ 商空間 $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ がコンパクト．）

定義 8 $k \in \mathbb{Z}$ とする．実解析的関数 $f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ が，重さ k の Γ に関する**マース波動形式**であるとは，以下の条件を満たすときをいう．

1. $f\Big(\dfrac{az+b}{cz+d}\Big) = \Big(\dfrac{cz+d}{|cz+d|}\Big)^k f(z)$ がすべての $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ で成立．（**保型性の条件**）

2. ある λ が存在して，$\Delta_k f(z) = \lambda f(z)$．つまり，$f$ が $\Delta_k := -y^2\Big(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\Big) + iky\dfrac{\partial}{\partial x}$ の固有関数になっている．微分作用素 Δ_k を重さ k の**非ユークリッドラプラシアン**という．

3. $\exists N > 0,\ f(x+iy) = O(y^N)\ (y \to \infty)$.

また，固有値が λ で，重さが k であるようなマース波動形式のなす $\mathbb{C}$ 上の線型空間を $W_{\lambda,k}(\Gamma)$ とおく．さらに，$\Gamma = \Gamma_1$ のとき，$W^0_{\lambda,k}(\Gamma_1) := \{f \in W_{\lambda,k}(\Gamma_1) \mid a_0(f) = \int_0^1 f(x+iy)\,dx = 0\}$ とおき，$W^0_{\lambda,k}(\Gamma_1)$ の元を固有値 λ，重さ k の Γ_1 に関する **マースカスプ形式**という．

正則保型形式同様，0 でない $W^0_{\lambda,k}(\Gamma_1)$ の元に対してもヘッケ作用素が定義されて，その同時固有関数であるマースカスプ形式のフーリエ係数から構成される L 関数は解析的に良い性質を満たし，逆定理も成立することがマースにより証明されている．定理 4 と同様に，$W_{\lambda,k}(\Gamma)$ の構造や**次元公式**を知りたいが，どうしたらよいのであろうか？ そもそも，どんな λ に対して，マース波動形式は存在するのだろうか？ それらを調べる道具が**セルバーグ跡公式**である．

4. セルバーグ跡公式

前節同様，$\Gamma = \Gamma_1$，または，ココンパクトとする．$\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$, $z \in \mathbb{H}$ に対して，$\gamma z = \frac{az+b}{cz+d}$, $j_\gamma(z) := \frac{cz+d}{|cz+d|}$ とおく．整数 m を負でない偶数とし，Δ_m を重さ m のラプラシアンとする．以下で定義される Γ に対する重さ m の**自乗可積分**なマース波動形式のなす L^2-空間を考える．$W^0_{\lambda,m}(\Gamma_1)$ や，ココンパクトな Γ に対して，$W_{\lambda,m}(\Gamma)$ を含んでいることに注意する．

定義 9（重さ m，L^2-保型形式のなす空間）

$$L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H};m) := \Big\{ f\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C},\ C^\infty \ \Big|$$
$$\text{(i) } f(\gamma z) = j_\gamma(z)^m f(z) \quad \forall\gamma \in \Gamma,$$
$$\text{(ii) } \Delta_m f(z) = \lambda f(z) \quad \exists\lambda \in \mathbb{R},$$
$$\text{(iii) } ||f||^2 = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{f(z)}\,\frac{dxdy}{y^2} < \infty \Big\}.$$

$L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H};m)$ を Δ_m の作用による“固有空間の直和”に分解したい．以下では Γ がココンパクトであるときに，これを説明する．この場合，$\Gamma\backslash\mathbb{H}$ がコンパクトなので，Δ_m の固有関数からなる $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H};m)$ の正規直交系 $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ が存在する．その固有値の集合を $\{\lambda_n = 1/4 + r_n^2\}$ とする．つまり，$\Delta_m\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ である．$\lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots \to \infty$ のように番号付けをしておく．

セルバーグ跡公式とは，ラプラシアンの固有値（**離散スペクトル**）$\{\lambda_n\}$ にわたる無限和を記述する公式でその右辺は Γ の共役類上にわたる，試験関数，またはそのフーリエ変換の和となっている，下記の条件をみたす試験関数 $h(r)$ をとると，以下で述べるセルバーグ跡公式が成立することが知られている．

- $h(r) = h(-r)$，かつある解析的条件を満たす．
- $g(u) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty h(r)e^{-iru}\,dr$.

定理 10（セルバーグ跡公式，Γ：ココンパクト）

$$\sum_{n=0}^\infty h(r_n)$$
$$= \frac{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{4\pi}\Big\{\int_{-\infty}^\infty rh(r)\tanh(\pi r)\,dr + \sum_{k=0}^{m/2-1}(m-1-2k)\,h\Big(\frac{i(m-1-2k)}{2}\Big)\Big\}$$
$$+ \sum_{\gamma\in\Gamma_{\mathrm{hyp}}} \frac{\log N(\gamma_0)\cdot g(\log N(\gamma))}{N(\gamma)^{1/2} - N(\gamma)^{-1/2}}$$
$$+ \sum_{R\in\Gamma_{\mathrm{ell}}} \frac{1}{\nu_R\sin\theta} \cdot \Big\{\frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cosh((\pi-2\theta)r)}{\cosh\pi r}h(r)\,dr$$

$$+\sum_{k=0}^{m/2-1}\frac{ie^{i(m-1-2k)\theta}}{2}h\Big(\frac{i(m-1-2k)}{2}\Big)\Big\}.$$

ここで，Γ_{hyp} は双曲元の Γ-共役類の集合，Γ_{ell} は楕円元の Γ-共役類の集合である．Γ の元 γ が双曲的とは $|\operatorname{tr}(\gamma)|>2$, 楕円的とは $|\operatorname{tr}(\gamma)|<2$ であるときをいう．ν_R は楕円元 R の位数であり，$0<\theta<\pi$ は R から決まる "角度" である．双曲元のノルムは (3) で定義される．また，γ_0 は双曲元 γ の Γ における中心化群の生成元である．

次に，**マース作用素** $\Lambda_m := iy\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}+\frac{m}{2}$,

$$\Lambda_m\colon L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H};m)\to L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H};m-2)$$

を考えよう．$f\in\operatorname{Ker}(\Lambda_m)$ と，$y^{-m/2}f(z)$ が正則であることが同値であることに注意すれば，以下の命題がわかる（$f\in\operatorname{Ker}(\Lambda_m)$ に対して，$\Delta_m f=\frac{m}{2}(1-\frac{m}{2})f$ である）.

命題 11（セルバーグ跡公式の差分） m を 2 以上の偶数, Γ をココンパクトとする．セルバーグ跡公式の差分：$L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H};m)-L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H};m-2)$ は以下で与えられる．

$$\Big(d(m)-\delta_{2,m}\Big)h\Big(\frac{i(m-1)}{2}\Big)$$
$$=\frac{\operatorname{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}{4\pi}(m-1)\,h\Big(\frac{i(m-1)}{2}\Big)$$
$$+\sum_{R\in\Gamma_{\mathrm{ell}}}\frac{ie^{i(m-1)\theta}}{2\nu_R\sin\theta}h\Big(\frac{i(m-1)}{2}\Big).$$

ここで，$d(m)-\delta_{2,m}$ は $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H};m)$ に作用する Δ_m の固有値 $\lambda=\frac{m}{2}(1-\frac{m}{2})$ の重複度とする．また，$\delta_{2,m}$ は $m=2$ のとき，値 1 をとり，それ以外では値 0 をとるとする．

上の命題で両辺を $h(i(m-1)/2)$ で割り算すれば，重さ m の Γ に対する正則保型形式のなす空間の次元を求めることができる．モジュラー群 $SL(2,\mathbb{Z})$ はココンパクトでないので，命題 11 はこのままでは使えない．この場合にもセルバーグ跡公式を拡張できて，同様に跡公式の差分を考えることにより，下記の次元公式を得ることができる．最後の項 $-1/2$ は，ココンパクトな場合には現れない放物元と "散乱行列式" からの寄与である．

定理 12（正則カスプ形式の次元公式） m を 2 以上の偶数，$\Gamma_1=SL(2,\mathbb{Z})$ とする．

$$\dim_{\mathbb{C}}S_m(\Gamma_1)=\delta_{2,m}+\frac{m-1}{12}+\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{4}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\Big(\frac{(m-1)\pi}{3}\Big)-\frac{1}{2}.$$

これから，定理 4 の別証明が得られることに注意する．

5. セルバーグゼータ関数

マース波動形式が存在するような固有値 λ についての情報を零点の位置で与えるのが**セルバーグゼータ関数**である．簡単のため，Γ をココンパクトで楕円元をもたないとする．このとき商空間 $X:=\Gamma\backslash\mathbb{H}$ は種数 $g\geq 2$ のリーマン面になる．$\gamma\in\Gamma$ を双曲的，つまり $|\operatorname{tr}(\gamma)|>2$ とする．すると，γ の Γ における中心化群は無限巡回群になり，γ は $SL(2,\mathbb{R})$ において，以下と共役となる．

$$\gamma\sim\pm\begin{pmatrix}N(\gamma)^{1/2} & 0\\ 0 & N(\gamma)^{-1/2}\end{pmatrix}\qquad(3)$$

$(N(\gamma)>1)$. $\operatorname{Prim}(\Gamma)$ を Γ の原始的な Γ-双曲共役類の集合とする（原始的とは他の双曲元のべきでかけないときをいう）．離散部分群 Γ（またはリーマン面 X）に対するセルバーグゼータ関数は以下のオイラー積で定義される．

$$Z_\Gamma(s):=\prod_{p\in\operatorname{Prim}(\Gamma)}\prod_{k=0}^{\infty}\Big(1-N(p)^{-(k+s)}\Big)$$

$(\operatorname{Re}(s)>1)$. セルバーグはこのゼータ関数を定義し，以下を証明した．

定理 13（Selberg 1956[5]） **1.** $\operatorname{Re}(s)>1$ において定義される $Z_\Gamma(s)$ は，$\mathbb{C}$ 全体に正則関数として解析接続される．

2. $Z_\Gamma(s)$ は $s=0$ に位数 $2g-1$, $s=1$ に 1 位の零点をもち，$s=-k$ $(k\in\mathbb{N})$ に位数 $(2g-2)(2k+1)$ の零点をもつ．(**自明零点**)

3. $Z_\Gamma(s)$ は $s=\frac{1}{2}\pm ir_n$ に零点をもち（**非自明零点**），位数は重さ 0 のラプラシアン Δ_0 のの固有値 $\lambda=1/4+r_n^2$ の重複度に一致する．

4. $\hat{Z}_\Gamma(s) := Z_\Gamma(s)\big(\Gamma_2(s)\Gamma_2(s+1)\big)^{2g-2}$ とおく．**関数等式** $\hat{Z}_\Gamma(1-s) = \hat{Z}_\Gamma(s)$ をみたす．ここで，$\Gamma_2(s)$ は 2 重ガンマ関数である．

この定理はセルバーグ跡公式（定理 10）に適当な試験関数を適用することで得られる．$h(r) = \dfrac{1}{r^2+(s-\frac{1}{2})^2} - \dfrac{1}{r^2+\beta^2}$ とすれば，これは試験関数の条件をみたし，セルバーグ跡公式に適用できる．$g(u) = \dfrac{1}{2s-1}e^{-(s-\frac{1}{2})|u|} - \dfrac{1}{2\beta}e^{-\beta|u|}$ となり，$\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = 4\pi(g-1)$ に注意して，重さ 0 のときのセルバーグ跡公式を書くと以下の命題を得る（跡公式の右辺の双曲共役類の寄与を書きなおすと $Z_\Gamma(s)$ の対数微分が現れる）．

命題 14（$Z_\Gamma(s)$ の対数微分の公式）

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{r_n^2+(s-\frac{1}{2})^2} - \frac{1}{r_n^2+\beta^2}\Big]$$
$$= (2g-2)\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{s+k} - \frac{1}{\beta+\frac{1}{2}+k}\Big]$$
$$+ \frac{1}{2s-1}\frac{Z'_\Gamma(s)}{Z_\Gamma(s)} - \frac{1}{2\beta}\frac{Z'_\Gamma(\frac{1}{2}+\beta)}{Z_\Gamma(\frac{1}{2}+\beta)}.$$

この命題から，定理 13 が導かれる．

6. 実 2 次体のヒルベルトモジュラー群に対するセルバーグ型ゼータ関数[3)]

$K/\mathbb{Q}$ を類数 1 の**実 2 次体**，$\mathcal{O}_K$ を K の整数環とする，$\varepsilon > 1$ を K の基本単数とする．$a \in K$ に対して，a' を $\mathbb{Q}$ 上の共役元とする．同様に，$\gamma \in SL(2,\mathcal{O}_K)$ に対して，γ の各成分を $\mathbb{Q}$ 上の共役元で置き換えた元を γ' とおく．

$\Gamma_K := \{(\gamma,\gamma') \,|\, \gamma \in SL(2,\mathcal{O}_K)\}$ は $SL(2,\mathbb{R})^2$ の既約な離散部分群になり，K の**ヒルベルトモジュラー群**という．Γ_K は上半平面 2 つの直積 $\mathbb{H}^2$ に成分ごとに一次分数変換で作用する．Γ_K はただ一つのカスプ (∞,∞)，i.e. Γ_K-同値でない放物的固定点をもち，$X_K = \Gamma_K\backslash\mathbb{H}^2$ は**ヒルベルトモジュラー曲面**と呼ばれる．Γ_K に対しても，ある種の**セルバーグ型ゼータ関数**が定義される．この節ではこのゼータ関数について紹介したい．

$(\gamma,\gamma') \in \Gamma_K$ を双曲–楕円的な元とする，i.e, $|\,\mathrm{tr}(\gamma)| > 2$ かつ $|\,\mathrm{tr}(\gamma')| < 2$ とする．双曲–楕円的な元 (γ,γ') の Γ_K における中心化群は無限巡回群となる．偶数 $m \geq 6$ を固定する．

定義 15（Γ_K のセルバーグ型ゼータ関数）

$$Z_K(s;m) := \prod_{(p,p')}\prod_{k=0}^{\infty}\Big(1 - e^{i(m-2)\omega}N(p)^{-(k+s)}\Big)^{-\kappa}$$

$(\mathrm{Re}(s) > 1)$．ここで，(p,p') は Γ_K の原始的な双曲–楕円共役類全体を動く．(p,p') は $PSL(2,\mathbb{R})^2$ において以下の元に共役であるとする：

$$(p,p') \sim \left(\begin{pmatrix} N(p)^{1/2} & 0 \\ 0 & N(p)^{-1/2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega\end{pmatrix}\right).$$

ここで，$N(p) > 1$, $\omega \in (0,\pi)$, $\omega \notin \pi\mathbb{Q}$ である．また，κ は実 2 次体 K から明示的に決まるある自然数である．このセルバーグ型ゼータ関数 $Z_K(s;m)$ について以下が証明できる．

定理 16 $m \geq 6$ を偶数とする．$\mathrm{Re}(s) > 1$ において定義される $Z_K(s;m)$ は $\mathbb{C}$ 全体に有理型関数として解析接続される．

定理 17 $Z_K(s,m)$ は以下の点で，“本質的” 零点と “本質的” 極をもつ：

- $s = \frac{1}{2} \pm i\rho_j \quad j = 0,1,2,\cdots$: 零点
- $s = \frac{1}{2} \pm i\mu_k \quad k = 0,1,2,\cdots$: 極

ここで，

- $\{\frac{1}{4}+\rho_j^2\}_{j=0}^{\infty} = \mathrm{Spec}(\Delta_0^{(1)}|_{\mathrm{Ker}(\Lambda_m^{(2)})})$
- $\{\frac{1}{4}+\mu_k^2\}_{k=0}^{\infty} = \mathrm{Spec}(\Delta_0^{(1)}|_{\mathrm{Ker}(\Lambda_{m-2}^{(2)})})$

はそれぞれ重さ $(0,m)$ もしくは $(0,m-2)$ の “ヒルベルト–マース波動形式” のなす L^2 空間に作用するラプラシアン $\Delta_0^{(1)}$ の固有値（**離散スペクトル**）の集合である．$\Lambda_m^{(2)}$, $\Lambda_{m-2}^{(2)}$ は “マース作用素” である．

（$\Delta_0^{(1)}$ は 2 変数複素関数 $f(z_1,z_2)$ に作用し，重

さ 0 のラプラシアン Δ_0 の変数を z から z_1 にしたもの．$\Lambda_m^{(2)}$ も同様に，z から z_2 にしたもの．）

$Z_K(s,m)$ は本質的零点，極以外にも Γ_K の単位元，楕円共役類，タイプ 2 双曲共役類，“散乱行列式” に由来する系列の零点，極をもつ（タイプ 2 双曲元とは，カスプを固定するような双曲元で，それ以外をタイプ 1 双曲元という）．

定理 18 $Z_K(s,m)$ は以下の関数等式をみたす：

$$\hat{Z}_K(s;m) = \hat{Z}_K(1-s;m).$$

完備ゼータ関数 $\hat{Z}_K(s,m)$ は以下で与えられる．

$$\hat{Z}_K(s;m) := Z_K(s;m)\Big(Z_{\mathrm{id}}(s)\, Z_{\mathrm{ell}}(s)\, Z_{\mathrm{sct/hyp2}}(s)\Big)^{\kappa}.$$

各局所因子は，以下で与えられる．

$$Z_{\mathrm{id}}(s) := \Big(\Gamma_2(s)\Gamma_2(s+1)\Big)^{2\zeta_K(-1)},$$

$$Z_{\mathrm{ell}}(s) := \prod_{j=1}^{N}\prod_{l=0}^{\nu_j-1}\Gamma\Big(\tfrac{s+l}{\nu_j}\Big)^{\frac{\nu_j-1-\xi_l(m,j)}{\nu_j}},$$

$$Z_{\mathrm{sct/hyp2}}(s) := \zeta_\varepsilon\Big(s+\frac{m}{2}-1\Big)\cdot\zeta_\varepsilon\Big(s+\frac{m}{2}-2\Big)^{-1}.$$

ここで，$\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_N\}$ は Γ_K の原始的楕円共役類の位数の集合であり，$\xi_l(m,j) \in \{0,1,\cdots,2\nu_j-2\}$ は明示的に計算できる．K の基本単数のゼータ関数は

$$\zeta_\varepsilon(s) := (1-\varepsilon^{-2s})^{-1} \tag{4}$$

で与えられ，ε は K の基本単数である．また，局所因子 $Z_{\mathrm{id}}(s)$, $Z_{\mathrm{ell}}(s)$ と $Z_{\mathrm{sct/hyp2}}(s)$ の零点と極の位置と位数は容易にわかるので，$Z_K(s;m)$ の零点と極が全て決定されたことになる．

$Z_K(s;m)$ の解析的性質や関数等式はヒルベルトモジュラー群 Γ_K に対するセルバーグ跡公式の “二重差分” を考察することによって得られる．（第 2 変数に対して，命題 11 のようにマース作用素で移りあう固有値に対するスペクトル項を引いて割り算する．これを 2 回繰り返す．）

定理 19 （$L^2\big(\Gamma_K\backslash\mathbb{H}^2;(0,m)\big)$ のセルバーグ跡公式の二重差分）$m \geq 6$ を偶数とする．$h(r_1,r_2)=h_1(r_1)\,h_2(r_2)$ を試験関数とし，$g_1(u) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h_1(r)e^{-iru}\,dr$ とおく．このとき，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{\infty} h_1(\rho_j) - \sum_{k=0}^{\infty} h_1(\mu_k)\\
&= \frac{\mathrm{vol}(\Gamma_K\backslash\mathbb{H}^2)}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} r h_1(r)\tanh(\pi r)\,dr\\
&\quad - \sum_{R(\theta_1,\theta_2)\in\Gamma_{\mathrm{E}}} \frac{e^{i(m-2)\theta_2}}{4\nu_R\sin\theta_1}\\
&\qquad \cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cosh((\pi-2\theta_1)r)}{\cosh\pi r}h_1(r)\,dr\\
&\quad - \sum_{(\gamma,\omega)\in\Gamma_{\mathrm{HE}}}\frac{\log N(\gamma_0)\,g_1(\log N(\gamma))}{N(\gamma)^{1/2}-N(\gamma)^{-1/2}}e^{i(m-2)\omega}\\
&\quad - 2\log\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty} g_1(2k\log\varepsilon)\\
&\qquad \cdot\Big(\varepsilon^{-k(m-1)}-\varepsilon^{-k(m-3)}\Big).
\end{aligned}$$

ここで，Γ_{HE} は双曲–楕円元の，Γ_{E} は楕円元の Γ_K-共役類の集合とする．ν_R は楕円元 R の位数であり，$0<\theta_1, \theta_2<\pi$ は R から決まる “角度” の組である．また，γ_0 は双曲–楕円元 (γ,ω) の Γ_K における中心化群の生成元の双曲成分である．

あとは，試験関数 $h(r_1,r_2)=h_1(r_1)\,h_2(r_2)$ をうまく選んで，定理 19 に適用すれば，右辺の双曲–楕円的共役類の寄与として $Z_K(s;m)$ の対数微分が現れる．これから，$Z_K(s;m)$ の解析的性質や関数等式が導かれる（定理 16, 17, 18）．

参考文献

1) 黒川信重・栗原将人・斎藤毅,『数論 II』, 岩波書店, 2005.
2) 黒川信重・小山信也,『リーマン予想のこれまでとこれから』, 日本評論社, 2009.
3) Y. Gon, Differences of the Selberg trace formula and Selberg type zeta functions for Hilbert modular surfaces. to appear in 数理解析研究所講究録, 11 pages.
4) D.A. Hejhal, The Selberg trace formula for PSL(2, ℝ). Vol.1, 2. *Lecture Notes in Mathematics*, **548**, **1001**. Springer-Verlag, 1976, 1983.
5) A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series. *J. Indian Math. Soc.* (N.S.) **20** (1956), 47–87.

（ごん・やすろ，九州大学大学院数理学研究院）

非可換類体論の現状

ゼータ関数の解析接続法

伊藤　哲史

1. はじめに

Weil がゼータ関数の“育成”を提唱してから 50 年以上が経過しました[6]．その間，多くの数学者により，様々なゼータ関数が“育成”されてきました．

最近，特にめざましいのが，非可換類体論と呼ばれる理論の進展です．非可換類体論は，1920 年代に完成した高木貞治，Artin による類体論を，非可換拡大に一般化する理論です．今まで全く手が届かなかった種類のゼータ関数にも，ようやく手が届くようになってきました．Wiles による Fermat の最終定理の解決を皮切りに，楕円曲線の保型性予想の解決，佐藤–Tate 予想の解決[1,9,11]，Serre 予想の解決，GL_2 の岩澤主予想の（多くの場合の）解決[4]など，ゼータ関数の“育成”に伴って，整数論への応用が次々と得られるようになりました．

本稿では，Hasse–Weil ゼータ関数と呼ばれる種類のゼータ関数の解析接続法に的を絞って，非可換類体論の進展の様子をほんの少しだけ眺めてみたいと思います．

著者の理解不足のため，Hasse–Weil ゼータ関数以外のゼータ関数については，ほとんど触れることができませんでした．本特集の他の原稿と併せてご覧いただければ，広大なゼータの世界の理解が一層深まると思います．

2. 解析接続は面白い，でも難しい

本稿のテーマである解析接続について説明しましょう．複素平面の領域 $U \subset \mathbb{C}$ 上で定義された正則関数 $f(z)$ を，$\alpha \in U$ のまわりで

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n \\ &= a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \cdots \end{aligned}$$

の形に Taylor 展開することができます．Taylor 展開の収束領域は円の内部 $|z-\alpha| < r$ です（$r \le \infty$ を**収束半径**といいます）．この領域内であれば z に好きな値を代入して構いません．例えば，指数関数の Taylor 展開

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \cdots$$

の収束半径は ∞ です．$z=1$ を代入すれば，自然対数の底 e の公式

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots = 2.71828\cdots$$

が得られます．三角関数 $\tan(z)$ の逆関数の Taylor 展開

$$\arctan(z) = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{7}z^7 + \cdots$$

の収束半径は 1 です．$z=1$ を代入すれば，円周率 π に関する公式

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots$$

が得られます（$z=1$ は収束半径ぎりぎりの値なので，少し議論が必要です）．Taylor 展開により，面白い公式をたくさん得ることができます．

ところが，複素関数論の講義では，Taylor 展開を習うと同時に

『収束領域外の z を代入しては“いけない”』

と習います．“いけない”と言われるとやってみたくなるものですから，少しだけ試してみましょう．等比級数の和の公式

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\cdots$$

は $\frac{1}{1-z}$ の $z=0$ のまわりでの Taylor 展開の公式を与えています．収束半径は 1 ですが，$z=2$ を無理やり“代入”してみましょう．

$$-1=\frac{1}{1-2}=1+2+4+8+\cdots.$$

あれ？ おかしな式が出てきてしまいましたね．

不思議な現象が発見されたら，それを理解し説明するために新しい理論を構築することで自然科学は発展してきました．数学もその例外ではありません．不思議な公式

$$-1=1+2+4+8+\cdots$$

を理解する一つの方法が「解析接続」です．

まず，$\frac{1}{1-z}$ の Taylor 展開の収束半径が 1 となる理由を説明します．$\frac{1}{1-z}$ は $z=1$ に極を持ちます．$z=0$ で Taylor 展開を始めても，$z=1$ の極に“ひっかかる”ため，収束領域は $|z|<1$ までしか延びません．ところが，$|z|<1$ で定義された関数を，$z=0$ とは異なる点で Taylor 展開し直すことで，定義域が延びることがあります．例えば，$\frac{1}{1-z}$ を $z=i/2$（i は虚数単位）を中心に Taylor 展開すると，その収束領域は極 $z=1$ に“ひっかかる”まで延びるので，$|z-i/2|<\frac{\sqrt{5}}{2}$ まで延びます．定義域内での Taylor 展開を繰り返すことで，一致の原理により，正則関数の定義域を“延ばして”いくことができます．これが**解析接続**です．$|z|<1$ で定義された関数

$$f(z)=1+z+z^2+z^3+\cdots$$

の解析接続により，有理関数 $\frac{1}{1-z}$ が復元されます．不思議な公式

$$-1=1+2+4+8+\cdots$$

は解析接続後の等式として理解することができます．

しかし，一般には，事情はそれほど単純ではありません．複素平面全体への解析接続は存在するとは限りませんし，存在したとしても，解析接続後の関数の性質を，もとの関数から理解することはほとんど不可能です．ここに，解析接続の難しさ・不思議さがあります．

3. Riemann ゼータ関数

Riemann は今日 **Riemann ゼータ関数**と呼ばれている関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots$$

の解析的性質について深い研究を行いました．右辺の無限級数（Dirichlet 級数）は半平面 $\mathrm{Re}(s)>1$ で絶対収束し，$\mathrm{Re}(s)>1$ 上の正則関数を定めます．

定理 1（Riemann） $\zeta(s)$ は複素平面全体に有理型関数として解析接続され，$s=1$ における一位の極を除き正則である．さらに，

$$\zeta(s)\leftrightarrow\zeta(1-s)$$

の形の関数等式をみたす．

関数等式の形を Γ 関数を使って具体的に書くこともできますが，ここでは省略します[7,10]．Riemann は，第 1 の積分表示

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx$$

や，テータ関数（重さ $\frac{1}{2}$ の保型形式）の積分で Riemann ゼータ関数を表す第 2 の積分表示

$$\zeta(s)=\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2})}\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2 t}\right)t^{\frac{s}{2}-1}dt$$

を用いて $\zeta(s)$ の解析的性質を深く研究し，素数分布との関係を考察しました．第 2 の積分表示は，保型表現の分岐則（保型形式の周期）とゼータ関数の特殊値の関係という現代数学の最先端の研究にもつながっています．

4. Hasse–Weil ゼータ関数

Hasse–Weil ゼータ関数は，**スキーム**という幾何的対象から定まるゼータ関数です．

例として Spec $\mathbb{Z}$ を説明しましょう．整数の集合を $\mathbb{Z}$ とおきます．整数 n に対し n の倍数全体を $(n) \subset \mathbb{Z}$ とおきます．(0) および素数 p に対する (p) からなる集合

$$\operatorname{Spec}\mathbb{Z} = \{(0), (2), (3), (5), (7), (11), \ldots\}$$

は位相空間の構造を持ち（Zariski 位相），その上の可換環の層を考えることができます（図 1）．(0) は**生成点**で，その閉包は Spec $\mathbb{Z}$ 全体に一致します．また，(p) は**閉点**で（p は素数），その閉包は一点 $\{(p)\}$ です．閉点 $x \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ に対し，その**剰余体** $\kappa(x)$ が定まります．(p) の剰余体は位数 p の有限体 $\mathbb{F}_p$ です．

一般に，$\mathbb{Z}$ 上有限型の可換環 A に対し，A の素イデアルの集合 Spec A を**アフィンスキーム**といい，アフィンスキームを貼り合わせて得られる局所環付き空間を**スキーム**といいます（本稿では $\mathbb{Z}$ 上有限型のスキームしか考えません）．Spec A の場合，閉点は極大イデアル $m \subset A$ に対応し，剰余体は A/m に対応します．

$\mathbb{Z}$ 上有限型のスキーム X に対し **Hasse–Weil ゼータ関数**が

$$\zeta(s, X) = \prod_{x \in X:\text{閉点}} \frac{1}{1 - (\#\kappa(x))^{-s}}$$

で定義されます．ここで，$\kappa(x)$ は閉点 $x \in X$ の剰余体で，$\#\kappa(x)$ はその位数です．$\zeta(s, X)$ は $\operatorname{Re}(s)$ が十分大きい領域上で絶対収束します．

予想 1　X を $\mathbb{Z}$ 上有限型のスキームとする．

1.（**解析接続**）$\zeta(s, X)$ は複素平面全体に有理型関数として解析接続される．

2.（**関数等式**）X の生成ファイバーが固有かつ滑らかな d 次元代数多様体であれば，

$$\zeta(s, X) \leftrightarrow \zeta(d + 1 - s, X)$$

の形の関数等式をみたす．

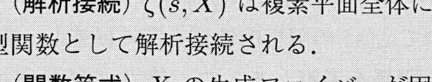


図 1　Spec $\mathbb{Z}$ のイメージ．

関数等式の具体的な形についての予想や，$\zeta(s, X)$ の極や零点の位置を X の幾何的な不変量を用いて表すより精密な予想もあります．

例えば，$X = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ の場合，閉点は素数と対応しますから，Hasse–Weil ゼータ関数は

$$\zeta(s, \operatorname{Spec}\mathbb{Z}) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

です．**素因数分解の一意性**により，$\operatorname{Re}(s) > 1$ で

$$\prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

が成り立つので（Euler 積），$\zeta(s, \operatorname{Spec}\mathbb{Z}) = \zeta(s)$ が分かります．

高次元の例を挙げましょう．$a, b \in \mathbb{Z}$ を $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ をみたす整数の組とします．このとき，代数曲線

$$Y^2 = X^3 + aX + b$$

は $\mathbb{Q}$ 上の**楕円曲線**を定めます．E をこの方程式が定める $\mathbb{Z}$ 上有限型のスキームとします．E はスキーム

$$\operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}[X, Y]/(Y^2 - X^3 - aX - b)\right)$$

に "無限遠点" を付け加えたものです（有限個の "悪い" 素数 p について修正が必要ですが，ここでは省略します）．素数 p に対して，

$$a_p = p + 1 - \#E(\mathbb{F}_p)$$

とおくと，$|a_p| \leq 2\sqrt{p}$ が成り立ちます（Hasse の定理）．ここで，$\#E(\mathbb{F}_p)$ は有限体 $\mathbb{F}_p$ における方程式 $Y^2 = X^3 + aX + b$ の解の個数に無限遠点の寄与である 1 を加えたものです．そして，$\operatorname{Re}(s) > 3/2$ において

$$\zeta(s, E) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}}{(1 - p^{-s})(1 - p^{1-s})}$$

が示されます．E の **L 関数**を

$$L(s, E) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - a_p p^{-s} + p^{1-2s}}$$

で定めれば，Hasse–Weil ゼータ関数の分解

$$\zeta(s,E)=\frac{\zeta(s)\,\zeta(s-1)}{L(s,E)}$$

が得られます（有限個の悪い素数に関する因子は無視しました）．$\zeta(s)$, $L(s,E)$, $\zeta(s-1)$ は，それぞれ，E の 0 次，1 次，2 次のエタールコホモロジーの寄与です（次節の定理 3 を参照）．$L(s,E)$ の解析的性質が問題となります．$L(s,E)$ の解析的性質については，谷山豊，志村五郎らによる予想がありました．1990 年代の Wiles, Taylor による部分的解決の後，Breuil, B. Conrad, Diamond, Taylor により次の定理が証明されました．

定理 2　$L(s,E)$ は複素平面全体に正則関数として解析接続され，

$$L(s,E)\leftrightarrow L(2-s,E)$$

の形の関数等式をみたす．

定理 2 の証明には，E の "保型性"，すなわち，

$$L(s,E)=L(s,f)$$

をみたす重さ 2 の保型形式 f が存在することと，保型形式 f の L 関数 $L(s,f)$ が良い解析的性質を持つことを使います．

5. Hasse–Weil ゼータ関数の解析接続へのアプローチ (1)——ゼータ関数の分解と Galois 表現

前節で紹介した楕円曲線の例のように，Hasse–Weil ゼータ関数が，いくつかの "小さな" ゼータ関数や L 関数の積に分解することがよくあります．Hasse–Weil ゼータ関数の研究は，その因子である "小さな" ゼータ関数の研究に帰着されます．Hasse–Weil ゼータ関数の分解を理解する鍵となるのが，Galois 表現の L 関数です．

素数 l および体同型 $\overline{\mathbb{Q}}_l\cong\mathbb{C}$ を固定します．連続準同型

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_l)$$

を l 進 **Galois 表現**といいます．l 進 Galois 表現は，3 つの条件

1. 半単純，
2. 有限個を除く素数 p で不分岐，
3. $p=l$ で de Rham

をみたすとき**代数的**といいます．ここで，de Rham とは，p 進 Hodge 理論による条件で，Galois 表現の代数性を表すものです（"Fontaine–Mazur の意味で幾何的" と呼ばれることが多いようですが，ここでは "代数的" と呼ぶのがふさわしいと思われます）．

ρ を代数的 l 進 Galois 表現とすると，ρ が不分岐な素数 $p\neq l$ に対して，**幾何的 Frobenius 元の固有値**と呼ばれる複素数の n 個の組

$$\alpha_{p,1},\ldots,\alpha_{p,n}\in\mathbb{C}$$

が定まります（ここで体同型 $\overline{\mathbb{Q}}_l\cong\mathbb{C}$ を使いました）．$\alpha_{p,1},\ldots,\alpha_{p,n}$ のすべての共役の複素絶対値が $p^{w/2}$ のとき，ρ の**重さ**は w であるといいます．ρ の L 関数が

$$L(s,\rho)=\prod_{p:\text{素数}}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\alpha_{p,k}\,p^{-s}}$$

で定義されます（有限個の悪い素数の因子については省略しました）．エタールコホモロジーを用いることで，次の定理が証明されます．

定理 3　X を $\mathbb{Z}$ 上有限型のスキームとし，その生成ファイバーの次元を d とする．このとき，

$$\zeta(s,X)=\prod_{i=0}^{2d}L(s,\rho_i)^{(-1)^i}$$

をみたす代数的 l 進 Galois 表現 $\rho_0,\ldots,\rho_{2d}$ であって，ρ_i の重さが i となるものが存在する．

Galois 表現 ρ の L 関数は ρ の既約成分の L 関数の積に分解します．エタールコホモロジーの Poincaré 双対定理を用いることで，予想 1 は Galois 表現の L 関数に関する次の予想に帰着されます．

予想 2　ρ を既約で重さが w の代数的 l 進 Galois 表現とする．このとき，$L(s,\rho)$ は複素平面全体に有理型関数として解析接続され，

$$L(s,\rho)\leftrightarrow L(1+w-s,\,\rho^\vee)$$

の形の関数等式をみたす（$\rho^\vee$ は ρ の双対）．

6. Hasse–Weil ゼータ関数の解析接続へのアプローチ (2)——非可換類体論予想

予想 2 の鍵となるのが，n 次元 Galois 表現と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の保型表現を結びつける非可換類体論と呼ばれる理論です．

1 次元の場合の予想 2 は類体論によって解決されます．1 次元代数的 l 進 Galois 表現

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_l^{\times} \cong \mathbb{C}^{\times}$$

を大域類体論の相互写像

$$\mathrm{Art}\colon \mathbb{Q}^{\times}\backslash\mathbb{A}^{\times} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q})$$

と合成することで，イデール類群 $\mathbb{Q}^{\times}\backslash\mathbb{A}^{\times}$ の指標（Hecke 指標）が得られます．ρ が位数有限のときは古典的な Dirichlet 指標に対応し，ρ が位数無限のときは，l と ∞ の局所成分を修正することで，**代数的 Hecke 指標**が得られます（ここで "$p=l$ で de Rham" という仮定を使います）．Hecke 指標の L 関数は，イデール類群上の積分で計算することができ（Hecke L 関数の積分表示[7,10]），それを用いて予想 2 を示すことができます．

$n \geq 2$ の場合，n 次元 Galois 表現の像は一般に非可換群になります．代数的 Hecke 指標の一般化が，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の**代数的保型表現**です．保型表現はアデール群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の（一般には無限次元の）表現で，"代数的" という条件は，保型表現の無限成分のパラメータ（無限小指標）の整数性と，"等圧" という誘導表現に関する大域的な条件で定義されます．

> **予想 3**（非可換類体論予想） l を素数とし，体同型 $\overline{\mathbb{Q}}_l \cong \mathbb{C}$ を固定する．重さ w の代数的 l 進 Galois 表現 ρ に対し，
>
> $$L(s+w/2,\, \rho) = L(s, \pi)$$
>
> が成り立つような $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の代数的保型表現 π がただ一つ存在する．逆に，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の代数的保型表現 π に対し，この等式をみたす ρ が（Tate 捻りを除いて）ただ一つ存在する．

予想 3 は "Langlands 予想" と呼ばれることもありますが，実は，Langlands 自身はきちんとした予想を定式化できませんでした（当時は p 進 Hodge 理論もありませんでしたから）．そのため，"Langlands 哲学" などと呼ばれることもあります．予想 3 が数学の予想として定式化され，広く信じられるようになったのは最近のことです（1990 年代の Wiles, Fontaine, Mazur の仕事以降のことだと思われます）．

保型表現の L 関数 $L(s,\pi)$ は積分表示を持ちます．これを使って，$L(s,\pi)$ が複素平面全体に有理型関数として解析接続され，

$$L(s,\pi) \leftrightarrow L(1-s,\, \pi^{\vee})$$

の形の関数等式をみたすことが示されます（$\pi^{\vee}$ は π の**反傾表現**），こうして，予想 2 は予想 3 に帰着されます．

Taylor は，Wiles の仕事を受けて，Galois 表現の整合系と保型表現の関係（潜保型性）を研究し，多くの "奇" な 2 次元 l 進 Galois 表現に対し，その L 関数が有理型関数として解析接続されることを示しました[5]．Taylor の仕事は，Khare-Wintenberger, Kisin らによる Serre 予想解決の基礎にもなりました．しかし，Maass の波動形式と関係すると期待される "偶" な 2 次元 Galois 表現については，まだ謎だらけです．

$n \geq 3$ の場合も，n 次元 Galois 表現の研究は進んでいます．Barnet-Lamb, Gee, Geraghty, Taylor は，次のようなかなり一般的な定理を証明しました[2]．

> **定理 4** $\{\rho_l\}_l$ を n 次元代数的 l 進 Galois 表現の整合系であって，"強既約"，"正則"，"自己双対" という条件をみたすとする．このとき，$\{\rho_l\}_l$ は "潜保型的" である．また，任意の l に対し，$L(s,\rho_l)$ は複素平面全体に有理型関数として解析接続され，関数等式をみたす．

最近の数論幾何の進展により，高次元 Galois 表現の L 関数についても多くの結果が得られるようになりましたが，『代数的 l 進 Galois 表現はすべて保型的であろう』という非可換類体論予想にはまだ遠いように思います．ユニタリ群の志村多様体を使う現在の方法では，"正則" や "自己双対"

といった条件を外すことは困難だと思われます．全く新しいアイデアによる突破口が待たれているのかもしれません．

7. 解析接続を超えて

“解析接続後” の予想として，Riemann 予想と BSD 予想を紹介しましょう．

予想 4（Riemann 予想） 領域 $0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$ における Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の零点は，$\mathrm{Re}(s) = 1/2$ をみたす．

$0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$ は $\zeta(s)$ の Dirichlet 級数の絶対収束領域の外ですから，この領域内の $\zeta(s)$ の性質を調べるためには，$\zeta(s)$ の解析接続をより深く理解する必要があります．Riemann 以降，多くの数学者が Riemann 予想に挑戦してきました．私たちは，まだ，$\zeta(s)$ の解析接続を真に理解してはいないのかもしれません．

BSD 予想は楕円曲線の L 関数に関する予想です．$\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線 E の有理点の集合 $E(\mathbb{Q})$ は有限生成アーベル群の構造を持ちます（Mordell の定理）．E の**階数**を

$$\mathrm{rank}\, E(\mathbb{Q}) = \dim \left(E(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \right)$$

で定めます．Birch と Swinnerton-Dyer は，1960 年代に，次の予想を提出しました．

予想 5（BSD 予想[8]） 楕円曲線 E に対して，

$$\mathrm{rank}\, E(\mathbb{Q}) = \operatorname*{ord}_{s=1} L(s, E)$$

が成り立つ．

BSD 予想は，解析接続された L 関数 $L(s, E)$ の解析的性質が，有理点の集合 $E(\mathbb{Q})$ をコントロールするという不思議な予想です．様々な部分的結果はありますが，階数が 2 以上の場合はほとんど何も分かっていません．

$s = 1$ は $L(s, E)$ の絶対収束領域の外です．$L(s, E)$ の定義に $s = 1$ を直接代入しては “いけない” と考えるのが普通です．ところが，$L(s, E)$ の定義に無理やり $s = 1$ を “代入” すると，正しい値から $\sqrt{2}$ 倍ずれた値に収束すると予想されています．この不思議な現象については，Goldfeld や K. Conrad（B. Conrad とは双子の兄弟）の研究があります[3]．

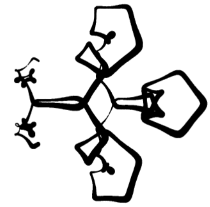
歴史を振り返ってみると，類体論，虚数乗法論，エタールコホモロジー，保型表現論，そして最近の非可換類体論の進展など，最先端の理論の進展に伴ってゼータ関数は解析接続され続けてきました．この原稿を執筆中に，Ngô が，**基本補題**の解決により，2010 年に Fields 賞を受賞したというニュースを聞きました．今後，保型表現の “関手性” の研究は飛躍的に進展することでしょう．さらに多くのゼータ関数が “育成” され，そして，解析接続されることを期待して，この小文を終えたいと思います．

参考文献

1) T. Barnet-Lamb, T. Gee, D. Geraghty, *The Sato-Tate conjecture for Hilbert modular forms*, preprint, 2009. `http://arxiv.org/abs/0912.1054`
2) T. Barnet-Lamb, T. Gee, D. Geraghty, R. Taylor, *Potential automorphy and change of weight*, preprint, 2010. `http://www.math.harvard.edu/~rtaylor/`
3) K. Conrad, Partial Euler Products on the Critical Line, *Canad. J. Math.* **57 (2)** (2005), 267–297.
4) C. Skinner, E. Urban, *The Iwasawa main conjectures for GL_2*, preprint, 2010. `http://www.math.columbia.edu/~urban/EURP.html`
5) R. Taylor, On the meromorphic continuation of degree two L-functions, *Documenta Math.* (2006), 729–779.
6) A. Weil, “ゼータ函数の育成について”（谷山豊記），数学 Vol.**7** No.4 (1956), 196–200.
7) A. Weil, *Basic Number Theory*, Reprint of the second (1973) edition, Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
8) A. Wiles, *The Birch and Swinnerton-Dyer conjecture*, The Millennium prize problems, Official Problem Description, 2006. `http://www.claymath.org/millennium/`
9) 伊藤哲史，「［速報］佐藤–テイト予想，ついに完全解決か？!」，数学セミナー 2009 年 9 月号，34–35.
10) 加藤和也，黒川信重，斎藤毅，『数論 I—Fermat の夢と類体論—』，岩波書店，2005 年.
11) 数学のたのしみ 2008 最終号，フォーラム：現代数学のひろがり「佐藤–テイト予想の解決と展望」，日本評論社.

（いとう・てつし，京都大学大学院理学研究科）

ラングランズ予想の展望



吉田 輝義

1. ラングランズ予想

本稿では現時点でのラングランズ予想の定式化を，その背景や動機づけに重点をおいて紹介する．私見では，ラングランズ予想は，フェルマー予想・リーマン予想・ポアンカレ予想のように特定の数学的対象について特定の事実を予想しその証明を募集する，というものではなく，現代数学のかなり広い範囲にわたるいくつかの理論に対していまだ「理解」されていない「対応」があることを指摘し，その意味を問い説明を求める，といったものである．もちろん，あとで述べるように，正確に定義された2つの集合の間に特定の性質をみたす全単射の存在を予想する，という形で，その他の予想と同じように厳密に定式化されてはいる．しかしその主張の表面を眺めても予想の価値が読み取れないので，周囲に広がる数学の全体像について筆者なりの見方を述べる．

現代数学のかなり広い範囲と書いたが，ラングランズ予想の枠組みは整数論であり，素数たちについての理論である．しかし，非常に多くの数学的理論が素数たちの世界に関係し反映されていて，それらの理論のつながりが素数たちのもつ秩序の中に表現されている．単純化して述べると，(1) 代数学・(2) 幾何学・(3) 解析学からそれぞれ，(1) 代数的整数論・(2) 代数幾何学・(3) 代数群の表現論がラングランズ予想に参加する．それぞれの理論には (1) ガロア表現・(2) 純モチーフ・(3) 保型表現という対象があるが，これらの間に一対一対応がある，とくに (1) ガロア表現と (3) 保型表現は各素数に対していくつかの数を与えるという形でラベルづけされるので，ラベル（ゼータとも言える）が一致するように互いに対応する，というのがラングランズ予想の主張である．

四則演算で閉じた集合を**体**という．20 世紀以降，代数学・幾何学・解析学を問わず現代数学の多くの理論は様々な**基礎体**の上で展開できることがわかった．理論の基礎体とは，方程式や関数のうち，係数や値をその体にとるものたちを考える，ということである．基礎体に依存しない理論は，方法上の一般的原理の存在を示唆するが，理論の基礎体を**有理数体** $\mathbb{Q}$ にできるとき，その理論は自然に素数の集合に関係する．上で様々な用語に「代数（的）」がついていたのは，$\mathbb{Q}$ 上で意味をもつという意味である．

2. 整数論，有限と無限

有理数体 $\mathbb{Q}$ はある意味で最も基本的な体であるが，四則演算以外の構造として順序をもち，順序の定める位相に関して完備化すると**実数体** $\mathbb{R}$ を与える．また $\mathbb{Q}$ は有理整数環 $\mathbb{Z}$ の商体として定義され，$\mathbb{Z}$ には素数たちがいる．各素数 p に対し $\mathbb{Q}$ を p **進位相**に関して完備化して p **進体** $\mathbb{Q}_p$ を得ることができるから，整数論では順序も素数の一種と考えて**無限素点** ∞ と呼ぶ．本稿では $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}_p$ で $p=\infty$ としたものと考えることにする．解析学では極限の収束を議論するために完備な体を基礎体に取る必要があるから，狭い意味での基礎体を有理数体 $\mathbb{Q}$ に取ることができるのは代数学（四則演算・多項式）だけである．しかし，$\mathbb{Q}$ 上の理論はすべての p に対して $\mathbb{Q}_p$ 上の理論をみることでわかる（**局所大域原理**）という考え方がある．これを厳密にしたものが本稿でも様々な形で現れるが，ラングランズ予想には，代数的な理論と解析的な理論の結びつきという重要な側面がある．

数学は有限のものを用いて無限のものを扱う学問であると言ってもいいだろうが，整数論では次のように有限から無限を捉える．別々の方法で与えられた2つ

の整数 x, y に対して $x=y$ を示したいとき，整数は無限個あるから，x, y の大きさが予め評価できない場合には，$0,1,2,3,\ldots$ としらみ潰しに当たっていってもいつになったら等式が示せるかわからない．しかし，正の整数 N をとれば x を N で割った余り $x \bmod N$ の可能性は N 通りだから，$x \equiv y \pmod{N}$ を示すには N 個の元からなる有限集合を調べればよい．これを無限個の N に対して示せれば，無限個の整数で割り切れる整数は 0 だけだから，$x=y$ が従う．例えば，素数 p を一つ決めて $x \equiv y \pmod{p^m}$ をすべての正の整数 m に対して示せばよいが，これを m に関する帰納法で行おうとするのがクリスタル理論などの p 進的方法である．言い換えると，整数 $x \in \mathbb{Z}$ を考える代わりに，あらゆる N に対する $x \bmod N \in \mathbb{Z}/(N)$ の列を考えてもよい．一般に $x_N \in \mathbb{Z}/(N)$ の列 (x_N) であって，M が N を割り切るとき必ず $x_N \bmod M = x_M$ となっているものを考え，これらの列全体のなす環を $\mathbb{Z}/(N)$ たちの逆極限（$\mathbb{Z}$ の**副有限完備化**）といって $\widehat{\mathbb{Z}}$ と書く．上に述べたことは，自然な単射環準同型 $x \mapsto (x \bmod N)$ によって $\mathbb{Z}$ が $\widehat{\mathbb{Z}}$ に埋め込まれるということである．このように有限集合の逆極限で表せる集合を**副有限集合**といい，有限集合の離散位相の逆極限としてコンパクト位相空間になる．整数論においては，副有限の理論，すなわち「有限の逆極限としての無限」が活躍する．素数 p に対して $\mathbb{Z}/(p^m)$ たちの逆極限は p **進整数環** $\mathbb{Z}_p$ であり，その元に整数の分母をつけたもの全体，すなわち $\mathbb{Z}$ 上 $\mathbb{Q}$ をテンソルした環が p 進体 $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ である．中国剰余定理より $\widehat{\mathbb{Z}}$ はあらゆる $\mathbb{Z}_p$ の直積環だから，$\widehat{\mathbb{Z}}$ に $\mathbb{Q}$ をテンソルした環 $\mathbb{A}^{\infty} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}$ を考え，さらに $\mathbb{R}$ を直積して**アデール環** $\mathbb{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{A}^{\infty}$ を作ると，これはすべての素点 p に対する $\mathbb{Q}_p$ を直積成分にもつ（$\mathbb{A} = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{A}^p$ と書ける）ような局所コンパクト位相環である．しかも普通の位相で $\mathbb{Z}$ が $\mathbb{R}$ の離散部分環であるように，$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{A}$ の離散部分環になる．「$\mathbb{Q}$ 上の代数学を $\mathbb{A}$ 上の解析学から考える」というのが局所大域原理の一つの表現である．もちろん $\mathbb{R}$ 上の解析学もこれに含まれる．解析学は無限次元の関数空間を相手にするが，例えばその中で特殊な微分方程式の解空間が有限次元になって豊かな構造を持つ有限のものが現れる．三角関数・指数関数・楕円関数・調和関数といったものがそうである．これらの多くは局所コンパクト空間に作用する位相群の離散部分群に関係している．数学は無限を用いて有限を扱う学問でもある．

3. 代数的整数論・ガロア表現

第一の対象であるガロア表現は，体から自然に定まる代数学の対象である．体は四則演算について閉じているから体 F に係数をもつ任意の一元一次方程式は F の中に根をもつが，n 次方程式ではそうとは限らない．F 上の任意の方程式が F に根をもつとき F は**代数的閉体**であるという．そうでなければ方程式の根を付加して体を拡大できる．例えば $\mathbb{R}$ に $x^2+1=0$ の根を付加して**複素数体** $\mathbb{C}$ を得る．F 上の任意の既約方程式の根をすべて付加すると代数的閉体 $\overline{F}$ になる．これは付加する順序などによらずに F **代数**（環と F からの環準同型の組）として同型を除いて一意に定まり，F の**代数的閉包**という．同型を除いて一意，といっても同型がどのくらいあり得るのかを表すのが $\overline{F}$ の F 代数としての自己同型群 $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ で，これを F の**絶対ガロア群**という（F が完全体でないときは $\overline{F}$ を分離閉包としておく）．これは F に付加した方程式の根たちの間の対称性を表す群である．例えば $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{R}}$ であるが，$\mathbb{R}$ 代数として i と $-i$ を取り換える複素共役という自己同型があり，$G_{\mathbb{R}}$ は位数 2 である．一般に G_F は $\overline{F}$ に含まれるすべての F の有限次拡大 F'/F の自己同型群（有限群）の逆極限だから副有限群である．$\overline{\mathbb{Q}}$ は**代数的数**全体のなす体で，$G_{\mathbb{R}}$ と異なり $G_{\mathbb{Q}}$ は可換でも有限でもない．群 G_F は，F 上のあらゆる方程式の根たちの対称性という F に固有な対称性を表す群である．

一般に，群 G を理解する一つの形はその表現のなすアーベル圏を理解することである．G の係数体 K 上の**表現** V とは K 上のベクトル空間で G が K 線型自己同型によって作用しているもののことである．本稿では K は $\overline{\mathbb{Q}}$ を含む代数的閉体である．2 つの表現の間の**射**を G の作用を保つ K 線型写像のことと定めると，G の K 上のすべての表現の圏 $\mathrm{Rep}_K(G)$ はアーベル圏になる．G が単位群なら G の K 上の表現とは単に K 上のベクトル空間のことだから，表現論とは線型代数（ベクトル空間の圏の理論）の一般化である．線型代数では対象の同型類は次元によって分類され，直和 $\oplus$・テンソル積 $\otimes$・双対 V^* などの関手的演算が定まる．一般の $\mathrm{Rep}_K(G)$ も，既約な対象（**既約表現**）が多くあることを除けばこれと似た圏になり，群 G そのものよりも柔軟に扱える．群準同型 $G \to G'$ による**引き戻し**は加法的関手 $\mathrm{Rep}_K(G') \to \mathrm{Rep}_K(G)$ を与え，G が G' の部分群ならばその随伴関手が表現

の**誘導**である．$\mathrm{Rep}_K(G)$ とそれらの間の関手は，空間上の層のなすアーベル圏とそれらの間の関手の様子に酷似する．それぞれ代数学と幾何学から「線型代数的な」構造を取り出して記述するものである．

群 G が位相・多様体構造・部分群の族などの付加構造をもつ場合，それらの性質を反映するように $\mathrm{Rep}_K(G)$ の対象を制限し，とくに適切な有限性を要請することで，捉えたい構造を反映した**淡中圏**を作りたい．淡中圏は有限次元ベクトル空間の圏や有限群の有限次元表現の圏の一般化であり，数学的対象の一つの理解の仕方を提案する．例えば G, K の位相を反映させるには，表現として**連続表現**（作用が連続なもの）のみを考える．G がコンパクトならば既約表現は有限次元だから，有限次元連続表現のなす圏を考えればよい．ところが G が絶対ガロア群 G_F のように副有限のときは，$K=\mathbb{C}$ 上の連続表現は有限群（離散位相）を経由するので $\mathbb{C}$ の位相は働かず，$K=\overline{\mathbb{Q}}$ とするのと変わらない．そこで暫定的に素数 l を選んで $\overline{\mathbb{Q}}_l$ を係数体に取ると，$\overline{\mathbb{Q}}_l$ 上のベクトル空間の自己同型群が多くの副有限部分群を持つため，はるかに多くの連続表現ができる．G_F の $\overline{\mathbb{Q}}_l$ 上の有限次元連続表現を **l 進ガロア表現**と呼ぶ．しかし，$F=\mathbb{Q}$ のとき l 進ガロア表現全体のなす圏は $\mathbb{Q}$ の性質を強く反映しない表現も多く含むので，興味ある構造を端的に反映した，より小さな淡中圏を取り出したい．これは (1) 暫定的に選んだ l の取り方によらない圏が望ましく，さらに (2) 素数たちの様子の反映がほしい．

まず (2) を見る．これは $G_{\mathbb{Q}}$ の部分群の族として現れる．一般に体 F' が F 代数（体の拡大）ならば，群準同型 $G_{F'}\to G_F$ が G_F の元での共役を除いて定まるから，G_F の表現 V の $G_{F'}$ への引き戻し $V|_{F'}$ は同型を除いて定まる．さて $\mathbb{Q}$ は各素点での完備化 $\mathbb{Q}_p$ という拡大体をもつから（この場合 $G_{\mathbb{Q}_p}\to G_{\mathbb{Q}}$ は単射になる），$G_{\mathbb{Q}}$ の表現 V に対し $V_p=V|_{\mathbb{Q}_p}$ が定まる．ガロア表現での局所大域原理は，「$G_{\mathbb{Q}}$ の表現 V はすべての p に対して $G_{\mathbb{Q}_p}$ への制限 V_p をみれば理解できる」という形になる．これを正確に述べるために $G_{\mathbb{Q}_p}$ の構造に少し踏み込む．$p=\infty$ のときはすでに見た．p が素数なら，$G_{\mathbb{Q}_p}$ は**有限体** $\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/(p)$ の絶対ガロア群 $G_{\mathbb{F}_p}$ への全射をもつ（これは $G_{\mathbb{Q}_p}$ の元を $\mathbb{Q}_p$ の拡大体における $\mathbb{Z}_p$ の整閉包（整数環）に制限して $\bmod p$ すれば定義される．p と素な N に対する 1 の N 乗根への作用を見ると言ってもよい)．副有限群 $G_{\mathbb{F}_p}$ は p 乗写像 $x\mapsto x^p$ $(\forall x\in\overline{\mathbb{F}}_p)$ を 1 に写すことで $\widehat{\mathbb{Z}}$ に同型になるが，この p 乗写像の逆元を**フロベニウス写像** Frob_p という．$G_{\mathbb{Q}_p}$ の l 進ガロア表現は $G_{\mathbb{F}_p}$ を経由するとき**不分岐**であるという．不分岐な表現はベクトル空間に Frob_p の作用がついているだけなので，その固有値の組として順序を無視した $\overline{\mathbb{Q}}_l$ の元の n 個組（**フロベニウス固有値**）が定まる．$G_{\mathbb{Q}}$ の l 進ガロア表現 V として，**ほとんどすべての**，すなわち有限個を除いてすべての p に対して V_p が不分岐であるものを考えると，これらの p に対し V_p のフロベニウス固有値という情報が定まる．さて局所大域原理だが，V が半単純（既約表現の直和）であれば，この情報が V の同型類を完全に特徴づけることが**チェボタレフの密度定理**から解る（この定理は類体論の一部，すなわち 1 次元の場合のラングランズ対応の一部を用いて証明される)．どんなに多くの有限個の素数を除いても情報が減らないところが，素数たちが緊密に協力していることを感じさせる．

さて (2) を踏まえて (1) に戻る．実は $p\neq l$ ならば V_p は l の取り方（係数体の位相）をほとんど反映しない．全射 $G_{\mathbb{Q}_p}\to G_{\mathbb{F}_p}$ による $\mathrm{Frob}_p^{\mathbb{Z}}$ の逆像（$\mathbb{Z}\subset\widehat{\mathbb{Z}}$ を思い出そう）を**ヴェイユ群** $W_{\mathbb{Q}_p}$ というが，$W_{\mathbb{Q}_p}$ の $\overline{\mathbb{Q}}_l$ 上の有限次元連続表現の圏に同値な，$W_{\mathbb{Q}_p}$ の**ヴェイユ–ドリーニュ（WD）表現**の圏という l によらない淡中圏ができる．例えば不分岐で半単純な WD 表現の同型類とはフロベニウス固有値に他ならない．これらは $\overline{\mathbb{Q}}_l$ の元だったが，$l\neq l'$ でも $\overline{\mathbb{Q}}_l$ と $\overline{\mathbb{Q}}_{l'}$ は体として同型であり，この情報には $\overline{\mathbb{Q}}_l$ の位相は反映されない．そこで (1) を解決するには V_l からも $W_{\mathbb{Q}_l}$ の WD 表現を取り出せればよいのだが，これは V_l が**ド・ラーム表現**という条件をみたすとき可能である．

そこで，(i) 半単純，(ii) ほとんどすべての p で V_p は不分岐，(iii) V_l はド・ラーム，という三条件をみたす $G_{\mathbb{Q}}$ の l 進ガロア表現を**代数的ガロア表現**と呼ぶ．各 l に対して $G_{\mathbb{Q}}$ の l 進代数的ガロア表現全体のなす淡中圏が (1) をみたすというのがガロア表現の理論の主予想である．これを述べる前に無限素点の情報を加える．V_l から $l=p$ の p 進ホッジ理論によって WD 表現 V_l' を取り出すと，V_l' にはホッジ・フィルトレーションという構造が加わり，それが非自明になる添字の集合（整数の n 個組）を V の**ホッジ–テイトの重さ**という．これに V_∞ の情報を合わせると $\mathbb{R}$ 上の $\overline{\mathbb{Q}}_l$ 係数ホッジ構造 V_∞' ができ，これを $W_{\mathbb{R}}$ の WD 表現と呼ぶ．こうして，代数的ガロア表現 V からはすべての素点 p に対して $W_{\mathbb{Q}_p}$ の WD 表現 V_p' ができ，局

所大域原理により，この情報 $\{V_p'\}$ は V を特定する．各 V_p' の係数体は $\overline{\mathbb{Q}}_l$ だが位相に構わないから，体としての同型 $\overline{\mathbb{Q}}_l \cong \mathbb{C}$ を固定して $\mathbb{C}$ 上の WD 表現と考えてもよい．さて，(1) は次のように定式化される：**予想 1—有理性**：$G_{\mathbb{Q}}$ の任意の l 進代数的ガロア表現 V に対してある**代数体**（$\mathbb{Q}$ の有限次拡大）E が存在し，すべての p に対して WD 表現 V_p' は E 上定義される．とくに，$\overline{\mathbb{Q}}_l$ の元であるフロベニウス固有値は実はすべて代数的数である．**予想 2—整合系の存在**：別の素数 l' を取って E を $\overline{\mathbb{Q}}_{l'}$ に埋め込むとき，すべての p で V_p' を与えるような l' 進代数的ガロア表現が必ず存在する．こうして代数的ガロア表現はあらゆる素数 l（正確には E の有限素点）に対する l 進代数的ガロア表現の**整合系**として存在する．これらは，次に見るように代数幾何学からも予想される．

4. 代数幾何学・純モチーフ

代数的ガロア表現は，実は $\mathbb{Q}$ 上の代数幾何学からも取り出される．$\mathbb{Q}$ 上の代数幾何学とは，$\mathbb{Q}$ 係数の多変数多項式たちを幾何的に考える理論である．変数を $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ で表すと，有限個の $\mathbb{Q}$ 係数多項式 $P_i(\underline{X})$ の零点集合 $\{\underline{X} \in \mathbb{C}^n \mid P_i(\underline{X}) = 0\}$ のような図形を $\mathbb{Q}$ 上の**代数多様体**と呼ぶが，これを $\mathbb{Q}$ 代数の圏から集合の圏への関手と考えたものが $\mathbb{Q}$ 上の**スキーム**である．この場合はすなわち $\mathbb{Q}$ 代数 R に対して R での零点集合，あるいは $\mathbb{Q}[\underline{X}]/(P_i(\underline{X}))$ から R への $\mathbb{Q}$ 代数の射（$\mathbb{Q}$ 線型な環準同型）の集合を与える関手である．射影代数多様体などもこのように関手と考えると，$\mathbb{Q}$ 上の代数多様体は（既約で被約な）$\mathbb{Q}$ 上有限型分離的スキームというクラスの関手としても定義できる．この場合も $\mathbb{Q}$ 代数の圏からの関手 X を $\mathbb{Q}_p$ 代数の圏からの関手 X_p に引き戻す（**底変換**という）ことができるから，局所大域原理は「$\mathbb{Q}$ 上の代数多様体 X を理解するには，すべての p に対して $\mathbb{Q}_p$ 上の代数多様体 X_p を理解すればよい」となる．スキーム論は環の局所化を用いてこれらの関手を幾何的に，つまり局所的なものの貼り合わせから大域的なものを捉えるという形で理解する理論だから，数論的な局所大域原理も「$\mathbb{Q}_p$ は素数 p という点の近傍を表す」という形で字義通りに解釈できる．

コホモロジー理論は幾何学における線型化の理論であり，多様体の上の関数空間，特異鎖複体，微分形式，層などを用いて多様体の圏からベクトル空間の圏への関手を作る．体 F 上の代数多様体の圏では，各素数 l に対して l 進エタール層の理論ができ，$\overline{\mathbb{Q}}_l$ 上の有限次元ベクトル空間の圏への関手（**エタールコホモロジー**）が定まる．体 F 上の代数多様体 X を $\overline{F}$ に底変換すると G_F の作用をもつから，そのエタールコホモロジーは G_F の l 進ガロア表現を与える．これを $H(X)$ と書く．関手性によって X 上の**代数的対応**（$X \times X$ の閉部分多様体の形式和）のなす環は $H(X)$ の自己準同型として作用し，とくに冪等元はガロア表現としての直和因子に射影する．F が $\mathbb{Q}$ や $\mathbb{F}_p$ のとき，このような冪等対応で $H(X)$ は既約表現に分解できると予想される（**テイト予想**）．正確には，射影非特異な X と冪等対応の組 M（とそのテイト捻り）を F 上の**純モチーフ**と呼ぶと，これらが**スタンダード予想**の下でよい淡中圏をなすと予想され，エタールコホモロジーの半単純化はこの圏から G_F の l 進ガロア表現の圏への関手となる（純モチーフの l **進実現**）．以下 $F = \mathbb{Q}$ とし，l 進実現はテイト予想によると忠実充満なのでその像を考える．

まず，純モチーフの l 進実現は代数的ガロア表現になる．これは $V = H(X)$ に対する V_p の性質だが，底変換の関手性から $V_p = H(X_p)$ なので $\mathbb{Q}_p$ 上の代数多様体 X_p の性質から導かれる．X_p が**良還元**をもつ，すなわち $\mathbb{Z}_p$ 上の固有平滑スキームに延長され，底変換で（定義方程式の係数を mod$p$ して）$\mathbb{F}_p$ 上の固有平滑多様体 Y_p を得るとき，$p \neq l$ なら $H(X_p) \cong H(Y_p)$ でこれは $G_{\mathbb{Q}_p}$ の不分岐表現である．ほとんどすべての p で X が良還元をもつのは，与えられた $\mathbb{Q}$ 係数定義方程式・その判別式の係数たちの分子・分母を割り切る素数は有限個しかないからである．$p = l$ でド・ラーム表現になるのは p 進ホッジ理論である．より詳しく，l 進実現 V から作られるホッジ構造 V_∞' はモチーフから作られるもの，すなわち $\mathbb{Q}$ 上の代数多様体 X を $\mathbb{C}$ 上の複素多様体 $X_{\mathbb{C}}$ と考えて $\mathbb{C}$ 係数特異コホモロジーをホッジ分解したものに一致する．

さらに，純モチーフの l 進実現の圏は代数的ガロア表現の圏に一致するというのが**フォンテーヌ–メイザー予想**である．純モチーフ M の l 進実現 V に対しては予想 1・2 が成り立つことがわかっているから（完全に示されていない部分はあるが），辻褄が合っている．すなわち有理性は良還元の場合にフロベニウス固有値がフロベニウス射の固定点の個数から幾何的に計算されることから従い，整合系は与えられたモチーフを各 l で l 進実現することで作られる．また $\mathbb{F}_p$ 上のスタンダード予想が解ければ，各素数 p に対する WD 表

現 V'_p は**フロベニウス半単純**になることが従う．これは不分岐の場合なら Frob_p が半単純に作用するということである．こうして，情報 $\{V'_p\}$ は対応するモチーフ M から幾何的に計算される．

最後に，代数幾何学は代数的ガロア表現 V について**予想 3**—**純性**という強い主張を付け加える：対応するモチーフ M が $H^i(X)$ に現れるとき i をその**重さ**というが，一つ一つの p での V'_p から重さ i を回復できるのである．無限素点では，複素多様体 $X_{\mathbb{C}}$ のホッジ理論における**ホッジ対称性**によって，重さはホッジ–テイトの重さの平均の 2 倍である．ほとんどすべての素数 p では X_p が良還元をもつから，**ヴェイユ予想**（ドリーニュの定理）によりフロベニウス固有値はすべて重さ i のヴェイユ数という特殊な代数的数になる．ただし，分岐した場合の V'_p の純性（**ウェイト・モノドロミー予想**）は未解決である．

5. 代数群の表現論・保型表現

最後に解析学とつながるのは，$\mathbb{Q}$ 上の代数群の表現論である．体 F 上の**代数群**とは，代数多様体になっている群のことだが，前節のようにスキームと考えれば，F 代数の圏から群の圏への関手 G である．F 上の対象から群 $G(F)$ が決まり，その対象を任意の F 代数 R 上で（R に底変換して）考えることで群 $G(R)$ ができればよい．本稿で見るのは**一般線型群** $G = \mathrm{GL}_n$ で，これは F 上の n 次元ベクトル空間 V を固定し，$G(R) = \mathrm{Aut}_R(V \otimes_F R)$，すなわち階数 n の自由 R 加群 $V \otimes_F R$ の R 自己同型のなす群としたものである．$G(R)$ は $\mathrm{GL}_n(R)$，つまり R 成分の $n \times n$ 可逆行列のなす群と同型で，G は「行列式が可逆」という方程式で定義される n^2 次元の代数群である．

代数群の**代数的表現**とは各 $G(R)$ が関手的に有限生成自由 R 加群に作用している状態のことで，これは可換群の表現から代数幾何的に構成できる．$n = 1$ の場合 $G = \mathrm{GL}_1$ は可換で，$\lambda \in \mathbb{Z}$ に対して V を λ 回（$\lambda < 0$ なら双対 V^* を $-\lambda$ 回）テンソル積した 1 次元表現 $V(\lambda)$ が G の既約代数的表現のすべてである．一般の n に対し，V の 1 次元空間への直和分解 $V = L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$ を一つ取ると，$\underline{L} = (L_1, \ldots, L_n)$ の自己同型群 T は G の可換部分群で，対角行列全体すなわち GL_1 の n 個の直積に同型である．また $0 \le i \le n$ に対する V の i 次元部分空間 V_i で $V_i \subset V_{i+1}$ なる列 $\underline{V} = (V_1, \ldots, V_n)$ を V の**旗**という．$\underline{L}$ は $V_i = L_1 \oplus \cdots \oplus L_i$ とすると旗 $\underline{V}$ を定め，この $\underline{V}$ の自己同型群 B は G の可解部分群で T を含み，可逆上三角行列全体のなす群に同型である．B は 1 次元空間の列 $\mathrm{gr}(\underline{V}) = (V_i/V_{i-1})_{1 \le i \le n}$ に作用し，B から $\mathrm{gr}(\underline{V})$ の自己同型群 T' への全射ができる．その核 N は対角成分がすべて 1 すなわち冪単行列全体で，T は T' に同型に写るから B は T と N の半直積である．整数の n 個組 $\underline{\lambda}$ は T の 1 次元表現を与え，これを $B/N \cong T$ によって B の 1 次元表現と考える．さて，F 代数 R に対し $V \otimes_F R$ の旗全体のなす集合を与える関手 $X = G/B$ は F 上の射影代数多様体になり，**旗多様体**と呼ばれる（射影空間やグラスマン多様体の一般化）．B の 1 次元表現 $\underline{\lambda}$ は X 上の G 同変直線束（階数 1 局所自由な連接層）$\mathcal{L}(\underline{\lambda})$ を与えるから，その大域切断あるいは連接コホモロジーに G の代数的表現 $V(\underline{\lambda})$ が現れる．この構成で G のすべての既約代数的表現の同型類が得られ，それらは順序を無視した整数の n 個組 $\underline{\lambda}$ と一対一に対応する．ここで使われた部分群 T, N, B は，自然に関手を与えるからいずれも F 上の代数群である．しかし代数群 G の表現論とは，ふつう代数的表現ではなく固定した F 代数 R に対する群 $G(R)$ の $\mathbb{C}$ 上の表現の理論を指す．ここでは $F = \mathbb{Q}$ で $R = \mathbb{Q}_p, \mathbb{R}, \mathbb{A}$，すなわち $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p), \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ などの $\mathbb{C}$ 上の表現である．これが解析学なのは，R の位相が $G(R)$ に与える位相を生かして，$G(R)$ やその商空間（**対称空間**）上の関数空間への正則表現に現れる無限次元連続表現を考えるからである．しかし代数群としての G の構造を忘れるわけではなく，可換群 $T(R)$，可解群 $B(R)$ や旗多様体 X は表現の構成・分類に有用である．

まず有限素点 p で $R = \mathbb{Q}_p$ を考える．$\mathbb{Q}_p$ の位相は $\mathbb{Z}_p$ を開集合とする**局所副有限**位相，すなわち各点が副有限な開近傍をもつ位相であり，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ も $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/(p^m))$ の逆極限である副有限群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ を開部分群にもつ局所副有限群である．局所副有限空間上の**滑らか**な関数とは局所定数関数のことを言う．局所副有限群の $\mathbb{C}$ 上の表現は，その任意の元がある開部分群 U による不変ベクトルである（U が自明に作用する）とき**平滑表現**という．局所副有限群の平滑表現の理論はリー群の表現の解析的理論に似た形を取るが，位相の働きを最小限に抑えているため，内容的には有限群の表現論を適度に一般化した代数的理論である．平滑表現は一般に無限次元だが，各開コンパクト群による不変空間が有限次元であるものを**許容表現**と

いい，これは有限次元空間の合併として「小さな無限次元」である．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の既約平滑表現は許容表現になる．局所副有限位相は全不連結（0 次元）空間だから，$T(\mathbb{Q}_p)$ の 1 次元平滑表現から上の旗多様体の構成を行うと大域切断は $B(\mathbb{Q}_p)$ から $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ への誘導表現である．最も簡単な例として，$T(\mathbb{Q}_p) \cong \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)^n$ の 1 次元表現として $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Z}_p)^n$ 上自明で $(p,\ldots,p)$ が複素数の n 個組 $\underline{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ で作用するものを考えて上のように誘導すると，$x_i/x_j=p$ となる i,j がない限り既約であり，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ による不変ベクトルをもつ既約表現（**不分岐表現**という）になる．一般には不分岐な既約部分商 $\pi(\underline{x})$ がただ一つ現れ，これを $\underline{x}$ を**ヘッケ固有値**（佐武パラメーター）にもつ不分岐表現という（$\underline{x}$ はこの場合 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 不変ベクトルへのある種の両側 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ 剰余類（**ヘッケ作用素**）の作用の固有値になる）．この構成ですべての不分岐表現の同型類が得られ，それらは順序を無視した複素数の n 個組 $\underline{x}$ と一対一に対応する．より一般に n の**分割** $\underline{n}=(n_1,\ldots,n_m)$, $\sum_i n_i=n$ に対応する旗 $\underline{V}$ $(\dim(V_i/V_{i-1})=n_i)$ を考えることで，放物型部分群 $P_{\underline{n}}$ の商群 $G_{\underline{n}}=\mathrm{GL}_{n_1}\times\cdots\times\mathrm{GL}_{n_m}$ の表現からの**放物型誘導**を構成できるが，この方法ですべての既約平滑表現が得られるわけではない．放物型誘導の部分商に現れない既約平滑表現を**尖点表現**という．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の任意の既約平滑表現 π はある $G_{\underline{n}}$ の尖点表現 $\pi_1\otimes\cdots\otimes\pi_m$ からの放物型誘導の部分商として実現でき，この実現の仕方を適当に正規化して $\pi=\pi_1\boxplus\cdots\boxplus\pi_m$ と書いて**ラングランズ分類**と呼ぶ（実際は途中に離散系列（二乗可積分）表現の構成が挟まる）．これはあたかも群の半単純 n 次元表現を既約 n_i 次元表現の直和に書いたかのようである．不分岐な場合は $\pi(\underline{x})=\pi(x_1)\boxplus\cdots\boxplus\pi(x_n)$ であり，ヘッケ固有値とフロベニウス固有値を一致させれば $W_{\mathbb{Q}_p}$ の半単純不分岐表現と対応させることができる．不分岐でなくても $n=1$ なら**局所類体論**によって $W_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}}\cong\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ だから $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ の平滑表現は $W_{\mathbb{Q}_p}$ の 1 次元平滑表現と対応する．これは一般化され，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ の既約平滑表現の同型類は $W_{\mathbb{Q}_p}$ の $\mathbb{C}$ 上のフロベニウス半単純な n 次元 WD 表現の同型類と自然に一対一に対応することが大域理論を応用して示されている（**局所ラングランズ対応**）．

次に無限素点 $R=\mathbb{R}$ を考える．古典的な保型形式論で考える上半平面上の正則直線束の切断は，対称空間 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times_{>0}O(2)$ 上の偏微分方程式（コーシー–リーマン方程式）の解空間で極大コンパクト部分群 $O(2)$ が決まった既約表現を通して作用する関数たちで，これは $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の離散系列表現を作る．このように，リー群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ のよい連続表現は，偏微分作用素すなわちリー環 $\mathfrak{g}$（ここでは常に複素化）と極大コンパクト群 $O(n)$ が整合的に作用し，$O(n)$ の各既約表現が有限回ずつ現れる**許容** $(\mathfrak{g},O(n))$ **加群**という $\mathbb{C}$ 上の「小さな無限次元」のベクトル空間を含んでいる．これらはアーベル圏をなし，既約対象 π にはシュアーの補題より $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ が 1 次元表現で作用する．$Z(\mathfrak{g})$ は $T(\mathbb{R})$ のリー環 $\mathfrak{h}$ の元の対称式全体だから，その 1 次元表現は順序を無視した複素数の n 個組 $\underline{a}$ で表せる．これを π の**重さ**といい，既約 $(\mathfrak{g},O(n))$ 加群の構成・分類に放物型誘導・ラングランズ分類を適用すると自然に得られるパラメーターでもある．離散系列表現は $n=1,2$ にしかないので，分割 $\underline{n}$ は $n_i=1,2$ をみたす．$n_i=2$ の離散系列表現 π_i は重さで定まり，$n_i=1$ なら π_i は $\mathbb{R}^\times$ の 1 次元表現だから重さに加え $\mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^\times_{>0}\cong\{\pm1\}$ の自由度がある．この情報量は $W_\mathbb{R}$ の WD 表現と同じであり，無限次元既約許容 $(\mathfrak{g},O(n))$ 加群の同型類と $W_\mathbb{R}$ の $\mathbb{C}$ 上の n 次元 WD 表現の同型類とが一対一に対応する（$\mathbb{R}$ 上の局所ラングランズ対応）．とくに重さ $\underline{a}$ が T の代数的表現に対応する，すなわち整数の n 個組 $\underline{a}$ であるとき，π は**代数的**であるという．重さ $\underline{a}$ の π に対応する $W_\mathbb{R}$ の WD 表現のホッジ–テイトの重さは $\underline{a}$ である．有限次元表現，つまり代数的表現 $V(\underline{\lambda})$ を代数的許容 $(\mathfrak{g},O(n))$ 加群と考えるとその重さは小さい順に並べた $\underline{\lambda}$ と $(0,1,\ldots,n-1)$ の和で，すべて異なる整数の n 個組（**正則な重さ**）になる．

最後にアデール $R=\mathbb{A}$ を考える．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ はすべての素点 p に対し $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ を直積成分にもち，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ を離散部分群にもつ位相群である．ここで自然に問題になる表現は**保型表現**，すなわち**保型形式**の空間に現れる $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の表現である．保型形式を説明する．これらはまず，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ 上の滑らかな関数で $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ に関して周期的な関数である．この関数たちには $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ が自然に作用するが，$p=\infty$ では許容 $(\mathfrak{g},O(n))$ 加群を作るように (i) $Z(\mathfrak{g})$ 有限（ある $Z(\mathfrak{g})$ の有限余次元イデアル I によって不変）かつ (ii) $O(n)$ 有限（$O(n)$ の有限次元表現を生成する）な関数に限定し，また有限素点では $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^\infty)$ の平滑表現を作るように (iii) $\mathrm{GL}_n(\widehat{\mathbb{Z}})$ 有限（$\mathrm{GL}_n(\widehat{\mathbb{Z}})$ のある開コンパクト群 U によって不変）な関数に限定する．

さらに，全射$|\det|:\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})\to\mathbb{R}^{\times}_{>0}$のファイバーは商ハール測度で体積有限だが $n>1$ のときコンパクトではないので，(iv) 境界（尖点）の付近で緩増加という条件で関数の増大度を制限する．この 4 つの条件をつけた関数 $\varphi:\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})\to\mathbb{C}$ を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ 上の**保型形式**といい，より強く増大度を抑えて各尖点の周りの冪単積分が 0 になる保型形式を**尖点形式**という．保型形式 φ を不変にする I,U のうち最大のものをそれぞれ φ の**重さ**，**レベル**という．保型形式について最も基本的な性質はその**有限性**，すなわち固定した I と U で不変な保型形式全体の空間 $\mathcal{A}(I,U)$ は $\mathbb{C}$ 上有限次元ベクトル空間になることである．従って $\mathcal{A}_I=\bigcup_U\mathcal{A}(I,U)$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^\infty)$ の許容表現である．有限性は $Z(\mathfrak{g})$ の元に楕円型偏微分作用素の正則性定理を用いて示される解析的な定理である．

保型形式全体のなす空間 $\mathcal{A}=\bigcup_I\mathcal{A}_I$ の部分商として現れる既約許容 $(\mathfrak{g},O(n))\times\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^\infty)$ 加群 $\Pi=\pi_\infty\otimes\pi^\infty$ を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の**保型表現**といい，尖点形式の空間 $\mathcal{A}^0$ に現れるものを**尖点保型表現**という．局所副有限群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^\infty)$ の既約許容表現 π^∞ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^\infty)=\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)\times\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^{\infty,p})$ の既約平滑表現として $\pi_p\otimes\pi^{\infty,p}$ と表せる．π_p を Π の p での**局所成分**といい，π_∞ の重さを Π の**重さ**という．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}^\infty)$ の開部分群は，$\mathrm{GL}_n(\widehat{\mathbb{Z}})$ の開部分群，すなわち $U=\prod_p U_p$ でほとんどすべての p に対し $U_p=\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ であるものを含むことから，ほとんどすべての π_p は不分岐表現であることが従う．また保型表現においてもラングランズ分類ができる：任意の保型表現 Π は $G_{\underline{n}}(\mathbb{A})$ から尖点保型表現 $\Pi_1,\ldots,\Pi_m$ のテンソル積を放物型誘導したものの部分商として実現できる．すべての p に対して，Π の局所成分 π_p のラングランズ分類が，Π_i の局所成分 $\pi_{i,p}$ の二乗可積分表現を用いたラングランズ分類で表したものに一致するとき Π は**等圧**であるといって $\Pi=\Pi_1\boxplus\cdots\boxplus\Pi_m$ と表す．等圧保型表現 Π に対する強い形の局所大域原理は「ほとんどすべての π_p によって Π は一意に定まる」というもので，**強重複度 1 定理**と呼ばれる．

さてようやくラングランズ予想である．保型表現 $\Pi=\pi_\infty\otimes\pi^\infty$ は，等圧かつ π_∞ が代数的であるとき**代数的保型表現**という．**ラングランズ予想**とは，$G_{\mathbb{Q}}$ の n 次元代数的ガロア表現 V の同型類と $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の代数的保型表現 Π の同型類が，すべての p に対して V'_p と π_p が局所ラングランズ対応で一致するように一対一に対応することを主張する．正確には，代数的ガロア表現は l 進表現として存在しているから，体同型 $\iota:\overline{\mathbb{Q}}_l\cong\mathbb{C}$ を決めて $\iota(V'_p)$ と π_p が対応すると言う必要がある．V も Π もほとんどすべての素点での情報で定まるから，不分岐な素点で「フロベニウス固有値＝ヘッケ固有値」という条件で対応が定まる．V'_∞ と π_∞ の対応から，V のホッジ–テイトの重さは Π の重さに等しい．また，代数的既約ガロア表現と代数的尖点保型表現との間の対応から，直和 $\oplus$ をラングランズ和 $\boxplus$ に写すことで一般の対応が導かれる．

保型表現論が代数的ガロア表現にもたらす予想を 2 つ述べる．保型表現はそれを生成する保型形式のレベルに応じて**導手**という自然数の不変量をもち，保型形式の有限性より，重さ $\underline{a}$ で導手 N の $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の保型表現 Π は有限個しかない．導手は各素数 p での π_p の導手（p の冪）の積に分解し，これらは π_p に対応する V'_p を用いて定義できるから，その積をガロア表現 V の**導手**という．従って，ラングランズ予想から**予想 4—有限性**，すなわち固定したホッジ–テイトの重さ $\underline{a}$ と導手 N をもつ n 次元代数的ガロア表現は有限個しかないことが従う．次に，各 V'_p または π_p の情報を L **関数**（**ゼータ関数**）の形に表すと，この対応はゼータの一致 $L(s,V)=L(s,\Pi)$ である．保型表現のゼータは全平面に解析接続されて関数等式をみたすから（ここでは保型形式に対するフーリエ展開・ポワソン和公式などの解析的手法が本質的である），代数的ガロア表現に対しても**予想 5—ゼータの解析接続・関数等式**が従う．予想 1（有理性）は多くの場合に保型表現に対しても直接示せる．予想 3（純性）は保型表現に対しては**ラマヌジャン予想**と呼ばれる．

6. 現状と展望

ラングランズ予想は部分的に証明されている．例えば最も基本的なガロア表現には**平方剰余記号**があり，平方剰余の相互法則はそれを最も基本的な保型表現である**ディリクレ指標**と対応させる．円分体の相互法則とクロネッカー–ウェーバーの定理を合わせると $\mathbb{Q}$ 上の**類体論**となり，これは $n=1$ のラングランズ対応，すなわち 1 次元代数的ガロア表現と $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A})$ の代数的保型表現＝**代数的ヘッケ指標**との対応を導く．証明の現状を述べるためには多少の精密化が必要になる．本稿で述べたのは $\mathbb{Q}$ 上の GL_n に関するラングランズ予想だが，任意の代数体上の任意の簡約代数群 G について同様の予想がある．これは一般化とも言えるが，以

下のように考えれば精密化でもある．

d 次の代数体 F の絶対ガロア群 G_F は $G_{\mathbb{Q}}$ の指数 d の部分群だから，G_F の n 次元代数的ガロア表現を誘導すれば $G_{\mathbb{Q}}$ の dn 次元代数的ガロア表現を得る．これに対応して，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の保型表現から $\mathrm{GL}_{dn}(\mathbb{A})$ の保型表現への**保型的誘導**という対応が予想され，F 上のラングランズ対応は $\mathbb{Q}$ 上の対応に反映される．類体論は任意の F 上で $n=1$ のラングランズ対応および予想 1～5 をすべて与えるが，それらの $\mathrm{GL}_d(\mathbb{A})$ への保型的誘導はまだすべて得られていない．一般には既約ガロア表現と尖点保型表現の対応が扱いやすく，誘導すると既約性は失われる．ちなみに，類数の有限性・単数定理は $n=1$ での予想 4（有限性）である．

次に一般の代数群 G だが，$G(\mathbb{A})$ の保型表現は大雑把には G の L 群に像をもつガロア表現に対応すると予想される．この像を GL_n に埋め込んでからラングランズ対応で戻して得られる $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の保型表現を，G から GL_n への**リフト**という．このリフトは多対一対応になり（L パケット），保型表現の理論のみで定義できると予想される（**ラングランズ関手性**）．つまりガロア表現の側では像の情報の精密化であり，保型表現の側では群を取り換える自由度が増える．

現状でのラングランズ対応の部分的証明には GL_n 以外の代数群が必要になる．証明は，(1) 保型表現 Π をコホモロジーに実現する**志村多様体**という特殊な代数多様体の中に対応するモチーフを作り，その l 進実現としてガロア表現 V を作る（**ガロア表現の構成**），(2) この構成で代数的ガロア表現が尽くされることを示す（**ガロア表現の保型性**），という順序で行う．しかし $n>2$ では GL_n の志村多様体は存在せず，$G(\mathbb{R})$ が離散系列表現をもつような G，しかも CM 体という特殊な代数体の上にしかない．そこで**跡公式**や**基本補題**を用いたラングランズ関手性で保型表現の群や代数体を変えることが証明の足がかりになる．現在では，(1) は任意の CM 体・総実体上の自己双対（ユニタリ群に移れる）かつ正則な重さ（志村多様体に現れる）の代数的尖点保型表現に対して構成され，細かい整合性の証明もほぼ終わっている．(2) はまとまった証明は $\mathbb{Q}$ 上の GL_2 にしか得られていない．部分的には (1) のできたケース全体に拡張されて潜保型性による**佐藤–テイト予想**の証明などをもたらしたが，$\mathbb{Q}$ 以外の体では GL_2 でも $\mathrm{mod}\,l$ 保型性（**セール予想**）の証明が障害として残り，$n>2$ ではセール予想の定式化でも志村多様体をもつ G に移る必要がありそうである．これら及び知られている関手性で移れるケース以外は全く未知である．実際 CM 体でない代数体上にはどのくらい代数的保型表現があるのだろうか？（$n=1$ では非常に少ない．）正則でない重さには，モチーフなら自己双対でも $d>1$ の d 次元アーベル多様体（$n=2d$；$n=2$ は楕円曲線で**フェルマー予想**の証明に使われた），保型表現なら $\mathbb{Q}$ 上の GL_2 でも**マース形式**など古典的な対象も多い．自己双対でないものは，双対との直和を変形して何かわかるだろうか？

ラングランズ対応が GL_n で簡明に成り立つのは，パラメーターが本稿に述べた形でぴったり一致することから確実であるように見える．これは GL_n の L 群が自分自身（ルート系が自己双対）だからとも言えるが，L 群が現れる理由の理解は**幾何的ラングランズ対応**（$\mathbb{Q}$ をリーマン面の関数体で代替した類似の理論）で進んでいるようである．局所ラングランズ対応や基本補題の証明で進展した局所体上の関手性（群や体の変更）は局所体上の理論だけでは証明できていないので，それらをコホモロジーに実現する**ラポポート–ツィンク空間**の理解が必要である．(2) では証明を $\mathrm{mod}\,l^m$ で合同なものへとガロア表現の l 進族（**肥田族**）を用いて拡張するため，代数的ガロア表現を定義する際に「捨てた」位相情報が復権する．代数的とは限らない l 進ガロア表現に対応する l 進保型形式の族，あるいは l 進保型表現（$\overline{\mathbb{Q}}_l$ に係数をもつ保型表現）の理論が期待される．$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_l)$ の $\overline{\mathbb{Q}}_l$ 上の平滑でない連続表現の（リー群の表現論に近い）理論の建設が進んでいるが，l 進ラングランズ対応の姿は局所でもまだ $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_l)$ 以外の群では見えてこない．

ラングランズ対応の出発点となる対象は，体・ベクトル空間，代数（環）の圏・テンソル積，位相空間など基本的なものである．現代数学の多くの理論がラングランズ対応に関係するのは，$\mathbb{C}$ が $\mathbb{Q}$ を含むから $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間は $\mathbb{Q}$ 構造をもつというように，基本的な対象が「もともと $\mathbb{Q}$ 上定義できたことを思い出す」からである．$\mathbb{Q}$ 上定義できた対象は，一旦 $\mathbb{Q}$ 構造を忘れて幾何や解析の柔軟性の上で縦横無尽の働きを見せても，その働きを突き詰めていけば生まれ故郷の $\mathbb{Q}$ と素数たちの緊密な世界に関係せざるを得ない，という印象である．クロネッカーの「自然数のみを神が与えた」という名文句の現代的解釈とも言えるだろうか．最後になったが，執筆前に様々なご教示を頂いた阿部紀行氏・市野篤史氏・伊藤哲史氏・谷口隆氏・千田雅隆氏・三枝洋一氏に感謝したい．

（よしだ・てるよし，ケンブリッジ大学数学科）

名著をめぐって

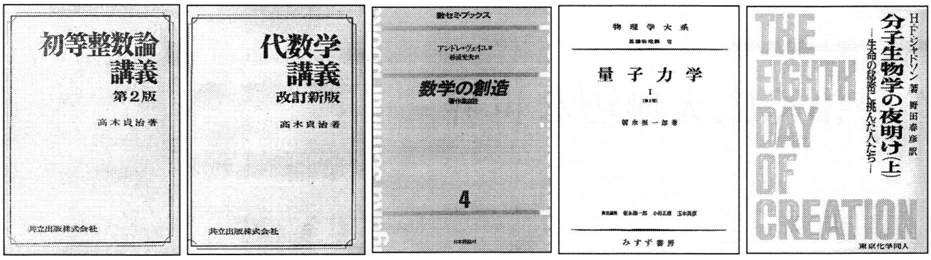
高瀬 幸一

あらゆる出版物に満ち溢れた時代にあって，「名著」という言葉を聴くと，若干の安心と若干の不安を感ずる．このような時代にあっても名著というものはあるのだという安心と，我々は名著と呼ぶに値するものを生み出しているのだろうかという不安である．

名著とは何であるか，明確に定義することは難しい．そもそも万人の認める名著などあろうはずもなく，一方で役に立ったというだけで名著と呼ぶのも気が引ける．名著とは，単純に役に立つ本というものを超えた，何かもっと趣のある書物であって，繰り返し読むことができて，しかも読む度に何か得るところのある書物であると思いたい．そういったことを念頭に，いくつか紹介しよう．

まず，高木貞治の『代数学講義』と『初等整数論講義』（ともに共立出版）をあげよう．言うまでもなく，高木貞治は類体論の完成に際して中心的な役割を果たした一人として，日本を代表する数学者である．上記二書の内容は，現在の標準的な理学部のカリキュラムでは扱われないものが多い．扱われる内容は徹底的に具体的である．具体的であるがゆえに，記述が簡潔さを欠く場合もあり，現代的な代数学における一般的，抽象的な手法を用いて簡潔な記述を試みることは非常に良い演習問題である．近代的な代数学の抽象性に食傷気味の学部学生には良い気分転換となろう．あるいは中学，高校で数学の教職につこうという学生には，教壇で直接役立つことは少ないかもしれないが，自分が教えようとしていることの外側に広がる世界についての深い理解は有益である．さらには一般の数学愛好家は古典数学の清華のいくつかを楽しむことができるだろう．ところで『初等整数論講義』の最後の部分で，初項と公差が互いに素な整数である等差数列には無数の素数が含まれる，というディリクレの定理が紹介されている．その証明はリーマンのゼータ関数を少し変形したディリクレの L-関数の解析的な性質を用いてなされる．このように所謂ディリクレ級数とそのオイラー積分解の解析的な性質から整数論的な命題を証明する方法は，オイラーが素数の逆数の和が対数の対数的に増加することを証明したときに用いた方法であるが，上記のディリクレの定理の証明によって，その効力が全面的に認識されたのではないかと想像される．それ以来，オイラー積をもつディリクレ級数の研究は，整数論の中心的な研究課題の一つとなって今日に至っている．

そこで次にアンドレ・ヴェイユをとりあげよう．ヴェイユは前世紀を代表する数学者の一人であって，ディリクレ級数を通した整数論の発展にも大きな寄与をした．その全集にはヴェイユ自身による注釈が付けられていて，その注釈だけを取り出して和訳したものが『数学の創造』（アンドレ・ヴェイユ著，杉浦光夫訳，日本評論社）である．ヴェイユは古典の大家で，インスピレーションの多くを古典数学の成果を深く研究することによって得ていたようである．全集における自註でも，そのような論文を書いたのはどのような理由によるのか，古典的な結果に遡って説明している．自分がそのような論文を書いたことがいかに必然的なことであるか，あるいは特定の命題を予想として提案することがいかに自然であるかをことさら証明しようとしているようである．それは谷山豊がいうところの，アイデアを明確に提出し，それを具体的に根拠づけるという討論方式に通ずるものであろうし，あるいはデカルト的懐疑主義とも言えるものだろう．何しろヴェイユはフランス人であって，デカルトの末裔なのだから．古典に通じていなくては理解できないことがたくさん書かれていて，一読して隅から隅まで理解することは到底不可能であろう．それでも時々手に取って，あちこちと読み直すのである．そのたびに何がしか感じるところがあって，今一度自分の問題に立ち返る元気が沸いてくるような気がするのは，やはりこれが名著だ



本文で言及している書籍.

からではないかと思う.

物理学に目を向けよう.完成された量子力学をみると,何がしかの不気味さ,あるいはイカガワシサを感ずる.よく言われるジョーク「君の学生は研究を止めてしまったが,どうしたの?」「残念ながら彼は量子力学の意味を理解しようとし始めたんだよ」からすると,そのような感想は私だけのものではあるまい.朝永振一郎の『量子力学 I』(みすず書房)はそのような不気味さの霧を少し吹き払ってくれる.プランクの黒体輻射の理論に始まる前期量子力学が,理論と実験の両面から詳細に解説されていて,量子力学というもののある種の必然性を見ることができる.それでもハイゼンベルグ形式,あるいはシュレーディンガー形式の量子力学に至るには大きな論理の断絶を感じる.そのような断絶は,量子力学の革命性を表しているのだろうし,数学を学んだ者と物理学を学んだ者の,世界を見る目の違いに由来するのかもしれないが,その断絶を越えたいと思うとき,手にして読むのである.

ところで今や古典となった黒川信重による言説によれば,整数環のスペクトラムは葉緑体であり,ガンマ因子はミトコンドリアであるという.だから整数論を理解するには分子生物学の理解は必要不可欠である,というのは冗談だが,一般に研究者というものの生態,あるいは科学の研究がどのように行われているか,そういったことを活き活きと描いた本として『分子生物学の夜明け』(H.F.ジャドソン著,野田春彦訳,東京化学同人)をあげよう.分子生物学の黎明期に,それぞれの研究者がどのような考え方をしていたかを,111 人の研究者と 12 人の家族,友人に直接インタビューして書かれたものである.例えば DNA の構造を発見するチャンスは 5 人の研究者に与えられていた.エルウィン・シャルガフは DNA の化学の第一人者で,アデニンとチミン,グアニンとシトシンのモル比が 1 であることを発見していたが,それを DNA の構造と結びつける飛躍はなし得なかった.ロザリンド・フランクリンは DNA の結晶の X 線回折図から DNA の構造を直接決定しようとしたが,結果の解釈で堂々巡りをしているうちに,様々な不幸な誤解があって研究は中断してしまった.モーリス・ウイルキンスはフランクリンと同じ研究機関にいたが,彼女とは折り合いが悪かった.フランクリンが研究を中断した後,DNA に直接関わる唯一の研究者だった時期があったが,なぜか DNA の結晶解析をしようとはしなかった.ジェームス・ワトソンとフランシス・クリックは DNA の構造を専門に研究する立場にはなかったが,上記の人々の研究をよく理解していて,わずかの情報から DNA の模型を完成させてしまった.キリギリスが成功したので,一生懸命働いていたアリは苦々しい思いを隠せない.もちろんワトソンとクリックは単純に要領がよかったわけではなくて,彼らだけが幾つもの発想の飛躍を立て続けに間違いなく飛んだ,ということだろう.判ってしまえば,遺伝というものは驚くほど単純なメカニズムに依存していたわけである.その単純さはシャルガフのような古い世代の生物化学者には到底受け入れがたい程のものであったけれども,その単純さがその後の分子生物学の発展をもたらしたといえるだろう.一方で,DNA 上で蛋白質をコードしていない部分の違いがサルと人間の違いを生じさせるようで,遺伝子の発現のメカニズムは思いのほか複雑と思われる.同様の思考の枠組みの劇的な変化は,数学においても時々発生する.シャルガフが分子生物学の展開を評して,小人があんな大きな影を生ずるのは,よっぽど日が傾いた証拠だ,というのを聞くとき,研究者はこれを反省の材料とすべきだろうと思う,二重の意味で.

(たかせ・こういち,宮城教育大学教育学部)

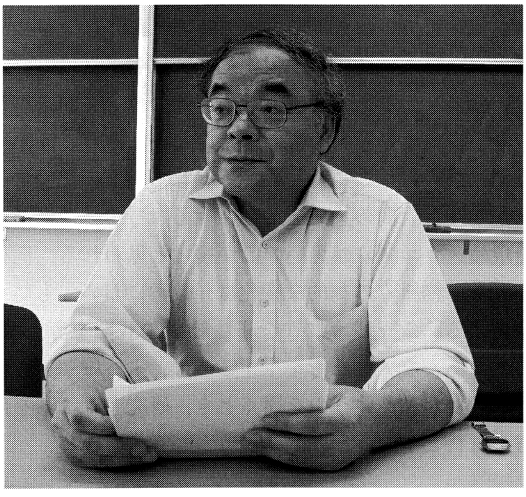
ゼータが拓く広大無辺な世界

黒川　信重（聞き手：編集部）

1. 数論研究の始まり

――今回の特集テーマである「数論」は歴史の古い分野であると思いますが，そもそも研究の出発点はどういったことだったのでしょうか．

数論は数学の中でも一番古い分野ですが，大体ギリシア時代から始まったというのが定説だと思います．今から2500年も昔の紀元前500年頃に，イタリアの南岸にクロトンという港町があるのですが，そこにピタゴラスがピタゴラス学校を築きました．今でいう研究所と言ったほうが分かりやすいかと思いますが，そこは数論を学ぶだけでなく研究もし，図形数とか三角数とか多角数とか，素数も研究されていました．



黒川信重氏．

このように，ピタゴラス学校で，“深い” 数論は始まったと言えます．ピタゴラス学校でとくに数論が重要視された理由は，ピタゴラスのモットーである「万物は数である」という，つまり（宇宙を含む）すべてのものは数で理解できるという思想が背景にあったからです．

2. 数論研究とゼータ関数

――今回の特集では数論の中でもゼータ関数に関連したものが多く取り上げられていますが，ゼータ関数というのはどういったものなのでしょうか．

ゼータ関数というのは，元々は素数の研究から始まったのです．ただ，今ではその種類がたくさんあるので，一言で言うのは難しい面もあります．起源から見ると，18世紀にオイラーが研究を始めたのが，ゼータ関数が数論に本格的に登場した最初です．

オイラーは，とくに素数に関する無限積でゼータ関数を構成できるということに気が付いて，それによって素数の研究とゼータ関数の結びつきがはっきりしたわけです．素数が無限個あることはギリシア時代から証明されていたのですが，オイラー

はゼータ関数を使って新しい証明を与えました．

それが，19世紀にリーマンの有名な研究に発展して，複素関数としてゼータ関数を研究するということにつながり，素数の分布がゼータ関数の零点というものに深く結びついているということが示されたわけです．リーマン予想は，今でも未解決という底知れない深い問題ですが….

19世紀末になると，ド・ラ・ヴァレー・プーサンとアダマールという二人が素数定理を証明しました．素数定理というのは，素数がどれくらいの密度で分布するかという定理で，一言で簡単に言えるきちんとしたものです．それは，リーマン予想までは必要ないのですが，その一歩手前ぐらいの結果を使えば証明できます．リーマンがこうやればできると言っていたのを，実際に実行してできたものです．

そして，20世紀になって，ゼータ関数は種類も増えて，いろいろな数論の研究が「ゼータ関数の研究」というものに，ある意味で変わってきました．もちろん「ゼータ関数の研究」でないものもあるのですが，こうしたことが20世紀に入ってからの特徴と言えます．

類体論というのは素数の深い研究が結実して，1920年に高木貞治によってゼータ関数を用いて完成されたものですが，20世紀の後半にかけての大問題というのは，非可換類体論を定式化するということでした．類体論というのはガロア群が可換なのですが，ガロア群が非可換の場合にどうするかというのが問題になっていたのです．

結局50年かかって，1970年にロバート・ラングランズさんによってラングランズ予想というものが作られました．ちょうど類体論が出てから50年後なのですが，これが現在，“非可換類体論予想”と言われているものです．

ですので，数論の重要なテーマというのが，ラングランズ予想を証明することだと言い直すことができます．今回の特集でも，そのことについて重点的に触れてありますが，これは数論の長い歴史の中でも特筆すべき時期に来ていると思います．

今から振り返ると，1995年にフェルマー予想が解かれたということが出発点だったのだと思います．1995年はある意味で到達点だったのですが，そこで数論の流れがラングランズ予想の本流の方向に来たのではないかと思います．フェルマー予想は，アンドリュー・ワイルズさんによって1993年6月に解けたということだったのですが，ちょっと証明に問題があって，穴があったのです．そこで，ワイルズさんの昔の学生だったリチャード・テイラーさんを，当時ワイルズさんがいたプリンストンに呼んで，最後のところの穴を埋めてフェルマー予想の証明が1994年秋に完成したんですね．最後の1995年に出版された論文は，ワイルズさんの単著のものと，テイラーさんとの共著のものと2つ並んで出ています．

その後の15年間は，テイラーさんが特に主導的な役割を担って，そこで使った手法を15年間かけて強力に磨き上げたのです．それで，ここ数年その成果が出てきて，佐藤–テイト予想の証明とか，セール予想の証明といったものが完成しました．フェルマー予想の何十倍も困難だったのですが，その実現によって専門家はとりわけ興奮していて，本特集のメインテーマにもなっています．

——リーマン予想も解決には近くなっているのでしょうか．

リーマン予想は，今一番研究が進んでいるものでは，絶対数学という，一元体上の数学を使います．

中心になって研究しているのはフランスのアラン・コンヌさんという人で，非可換幾何学とか C^* 環の専門家ですが，元々そうしたことでフィールズ賞も受賞しています．2008年ぐらいから一元体上の数学に興味を持ち始めて，周辺の何人かの研究者と非常にたくさんの論文を発表していて，リーマン予想の解決に向けて着実に進んでいることは確かだと思います．2010年11月の高木レクチャー（京都）でもコンヌさんが絶対数学とゼータ関数の話をされることになっています．

3. 数論研究の深まりと拡がり

――こうした数論の研究はどのように深まり，また，今後は数論以外の分野とどのような関連をもって広がっていきそうでしょうか．

数論というのは，結局今までの研究の進展を見ていますと，“応用数学” と言ったほうが適当かなと思うんですね．純粋数学ではあるんですが，その中の “応用数学” という位置づけで，つまり，何かの道具，新しい手法などが数学のある分野で開発されると，それを数論に使うことによって進展が得られる，という歴史になっています．

18 世紀のオイラーが開発した解析的な手法はゼータ関数，19 世紀になるとガロアが始めたガロア理論，20 世紀だとグロタンディークが始めたK理論，といったものがありますが，こうしたいろいろな手法が数論の研究に結びついてきたわけです．

とくに 20 世紀は，トポロジー，つまり位相幾何的な手法が強力に使われたという印象があります．ジャン＝ピエール・セールやバリー・メイザーといった，元々はトポロジーの研究をしていた人が数論に参入してきて，そこで使っていた手法を数論に導入していったんですね．ワイルズさんが成功したときも，デフォーメーション理論というトポロジー的な手法を使っています．

数論がどう発展していくかというのは，今後もゼータ関数を中心に発展していくとは思いますが，そこにどんな手法が使われるかはよく分からないところです．先ほど言った絶対数学というのもそうでしょうし，何か見つかってくれば，それが数論の研究を深めることに使われるのだと思います．

4. 影響を受けたこと

――先生が研究者になるに当たって影響を受けたことをお聞かせ下さい．

1969 年だと思いますが，高校生のときに「大学への数学」という受験雑誌に，上野健爾先生が「二つの予想」というタイトルで記事を書かれていて，それに大変感銘を受けました．

二つの予想というのは，リーマン予想とラマヌジャン予想を対比して説明していたのですが，ラマヌジャン予想は当時ドリーニュが研究を進めていて，それから 5 年後の 1974 年には証明が完成しました．

結局，代数幾何的なリーマン予想の類似というものがあって，それをドリーニュが証明して，その結果ラマヌジャン予想も証明されたという筋道になったわけです．

ちょうど私は大学に入る前後の時期ですが，リーマン予想とラマヌジャン予想という極めて面白い問題をみて，その中には深い関連があるという魅力にひかれました．

リーマン予想だけだと普通の素数の話で終わってしまうと思うのですが，ラマヌジャン予想という代数幾何的な類似を見ると，未知の広大な新しい数学的世界が広がっているという印象を受けて，今思うとこれまでの 40 年近くの私の研究はその周辺をさまよっていたなあと感じます．修士論文も，ラマヌジャン予想の多変数でのモジュラーフォームでの反例といったものをやりましたので，大学院時代もそうしたことの影響を受けています．

――影響を受けた本ではどういったものがございますか．

リーマン予想を研究するためのバイブルと言われている，ティッチマーシュの『The Theory of the Riemann Zeta-function』（Oxford Univ. Pr.）という本があるのですが，1950 年ぐらいにリーマン予想に関する総まとめとして書かれて，今でも古くない内容です．それを読んだというのが今でも強く印象に残っています．

かなり含蓄のある書き方がなされていて，リーマン予想を長年研究した人だけあって，教科書の端々に示唆に富んだことが書かれていて，普通の教科書では定理と証明だけの構成になるのですが，各章の序文などをみると，数学というよりは哲学

的なことが述べられています．

例えば，リーマン・ゼータ関数は，素数に関するオイラー積によって実部が1より大きい所では零点はないのですが，それが $\frac{1}{2}$ の右まで零点がないというのがリーマン予想で，ティッチマーシュによれば，その解決には“オイラー積の影響圏”を1より大きい所から，できるだけ左にまで広げることである，ということが，「Sphere of Influence」といった表現で書かれているんですね．

これは，もちろん数学的にはそう簡単には実行可能ではないのですが，そういったことにも信念をもって，真に受けて一生懸命考えると，リーマン予想に関しても非常に良いことができるのではないかと思います．

5. メッセージ

——今後，研究者を目指す方や学生さんへのメッセージをお願いします．

数論はやさしく入門できるというのが特徴ですので，どんどん参入していただければ嬉しいです．

今回の特集でも先生方も書いていらっしゃいますが，数論の歴史上でも過去に例がないほど，今は爆発的に進展している時期でもありますので，とても面白いときです．そういうときに素直に興味をもって研究されるのは，良いことだと思います．ただ一つ問題なのは，なかなか道具が大変になってきていますので，ある程度覚悟はしないと最先端には到達できません．

アルティンの予想という問題があるのですが，これは，素数に関する原始根というものがあって，例えば2とか10が原始根になるような素数が無限個あるかどうかという問題です．初等整数論の問題に見えるのですが，実際は20世紀の後半になって，リーマン予想を拡張した“一般化されたリーマン予想”というのを仮定すれば証明できるという結果が出ています．この例からわかるとおり，一見初等的に見える問題も，よく調べてみると深い問題になるということもあります．

フェルマー予想というのは誰が見ても簡単そうに見える問題なのですが，結局20世紀までの数論の研究で使われてきた道具を洗いざらい使って，総攻撃してやっと陥落したという感じですので，問題はやさしそうに見えても，実際に研究するにはかなりの道具が必要になってきます．

こういったことを逆に面白いと思って，解けなくても仕方ないと取り組むぐらいが，数論とつきあう方法じゃないかと思います．

リーマン予想で言えることは，それが解けた場合，多分野へ波及する論文になることは確かだと思います．ですので，進展するとそこだけにとどまらないというのも，数論の特徴だと思います．

さらにアドバイスをするとすれば，1つだけでも得意分野を作っておくといいですね．数学以外でも，例えば超弦理論でもよいと思いますが，自分が自信のある手法を数論に使えるようになるとやりがいになると思います．もちろん，数論でどんなことが行われてきたかをざっと調べる必要はありますが，新しい手法というのは有効だとは思います．絶対うまくいくという保証はできませんが…(笑)．

物理に触れますと，理論物理で使われるような手法は数論でもよく使われるのですが，その逆もあります．ウィッテンは，幾何学的ラングランズ予想というもので物理理論を定式化することをここ数年やっているのですが，うまくいけば数論の大問題と物理的な研究がうまく結びついてくれるかもしれないという期待も生まれています．

いずれにしましても，自分は何を解明したいのか，という問題意識が最も重要なことはピタゴラスの昔から変わりません．

——本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

(2010年7月，

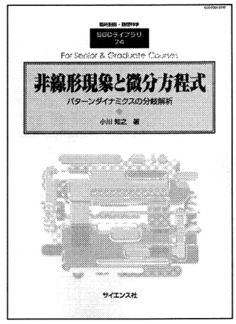
東京工業大学大岡山キャンパス研究室にて)

(くろかわ・のぶしげ，東京工業大学大学院理工学研究科)

非線形現象と微分方程式

パターンダイナミクスの分岐解析

小川知之著，B5 判，112 頁，本体 1781 円，サイエンス社



前世紀の中頃，（計算機科学でも有名な）アラン・チューリングは生物の形態形成に関する論文の中で，拡散誘導不安定化という画期的なアイディアを提示した．これは，拡散係数の異なる 2 種類の成分が相互作用すると一様な状態が不安定化し，安定な空間パターンが生成されるというものである．分岐解析とはこのような空間パターンを数学的に扱うために，系に含まれるパラメータを連続的に変化させたときの解構造の変化に着目した手法である．本書は各種の非線形系に見られるパターン形成の過程に対し，分岐解析を用いた最近の研究について（著者自身によるものを含めて）まとめたものである．

非線形現象の解析には問題に応じた特有の議論が必要で，数学的に厳密に扱われるとその複雑さに閉口しがちである．実際，分岐解析には見通しの悪いハードな計算を要するのが普通で，初学者には非常に取っつきが悪い．特に偏微分方程式に対する分岐解析は無限次元空間の中で問題を考えることになり，直感なしに議論を進めると何をやっているのかわからなくなってしまう．そこで本書では，いくつかの具体的な問題に焦点を絞り，簡単な例から始めて徐々に複雑な問題へと話を進めることにより，予備知識がそれほどなくとも平易に読み進めることができるように工夫されている．内容的には研究の最先端に近い高度な話が主であるが，読者の理解の助けとなるように随所に効果的なコメントが加えられている．

各章の内容を見ていこう．まず第 1 章では，2 個の状態変数を持つ 2 個のセルが相互作用する系の挙動について述べている．この 2 セルモデルは，拡散的に結合した同一の特性を持つ 2 個のセルからなり，4 変数の連立常微分方程式で記述される．2 セルモデルはチューリングのアイディアを具現化する最も簡単な系であり，パラメータの値によって同期した平衡状態が不安定化することが示される．この章ではさらに n セルモデルへと議論を進めて分岐解析の基本的な考え方が説明されている．

第 2 章では，熱対流のレーリー・ベナール不安定性や反応拡散系における拡散不安定化についての解説があり，偏微分方程式で表される重要なモデルがいくつか導入される．

第 3 章からは，いよいよ非線形性との関わりによる空間パターンの解析である．偏微分方程式に対する分岐解析においては，無限次元の問題を何らかの方法で有限次元に帰着して扱うのであるが，ここでは（リアプノフ・シュミット分解による方法ではなく）中心多様体理論に基づく方法を用いている．中心多様体理論は一般的に扱うと理解するのは簡単ではないが，2 セルモデルを例にとって平易な説明を与え，無限次元の問題に対する足がかりとしている．

第 4 章では，複数のモードが同時に分岐する多重分岐と呼ばれる現象を扱っている．数学的にはさらに込み入ってくるが，複合モードの空間パターンはより興味深いものになり，シミュレーションによるパターンダイナミクスの図を見るだけでもなかなか楽しい．

第 5 章は分岐の大域的構造についての説明にあてられている．分岐理論は本質的に局所的な理論であり，大域的な構造を解析的に扱うのは特殊な状況を除けば困難なため，ここでは数値的手法を用いた結果について述べられている．

第 6 章は，時間的にも空間的にも構造を持つパターンについての解説である．現象論的にはさらに魅力的なパターンが現れるが，大まかな解説がなされているのみである．確かにこれ以上深入りすると数学的には難しくなりすぎるのであろうが，内容的にはやや尻切れトンボになってしまったのが惜しまれる．

全体に証明はできるだけ排除し，また話題をかなり絞っているため，本書を分岐解析の教科書として使うのは適当ではないが，一方で分岐解析とは何かについて手っ取り早くイメージをつかむには格好の書である．読者が苦労しそうなところをうまくかわして研究の最先端まで読者を導いているところは見事であり，著者の経験と力量によるものであろう．文献表は最小限であるが重要なものはきちんと押さえてあり，パターンダイナミクスや数理モデリングの研究に関わるものにとっては必読の一冊である．

柳田　英二（東京工業大学大学院理工学研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

吉田　春夫

1981年1月号



本誌1981年1月号の特集は「こま・コマ・独楽」である．コマに代表される剛体運動の諸相が何人かの大先生によって語られている．その中で20代の大学院生だった筆者は「コワレフスカヤのコマ」という記事を書かせてもらった．結構時間をかけた記事だけあって，随分と生意気で気合いの入ったものである．ただ本誌1981年1月号はもう手元にはない．それゆえ他の記事についてはコメントできない．昭和が平成に変わった1980年代の終わりに，筆者は3年間ほどのヨーロッパでの流浪生活を終えることになったが，帰国の際に書籍の郵送に航空便を使わずに安い船便を使ったことが原因である．郵送代の安さに目がくらみ大事なものを多く失ってしまった後悔が残る．

コワレフスカヤのコマとは，剛体の自由回転（オイラーの場合），一様重力場中の軸対称コマ（ラグランジュの場合）に続く，可積分な最後の場合として歴史に残る剛体運動であり，コワレフスカヤ（Kovalevskaya）によって1888年に発見された．ただ，それを現実にプラモデル等で実現するのは容易ではなく，実際の動きを見るにはコンピュータグラフィックスに頼るしかない．筆者の記事は19世紀末の時点における，そのコワレフスカヤのコマの発見物語に重点をおいたものであった．既知の可積分なオイラーの場合，ラグランジュの場合がそうであったように，従属変数が複素時間平面での特異点が極（ポール）のみとなる，という要請をおくと，残る第3番目の可能性としてコワレフスカヤの場合が特定される．そしてなぜかその場合も可積分となってしまう．この，解の特異点の性質と系の可積分性の間に潜む隠された関係は何か？あるいはコワレフスカヤが新たな可積分な場合を発見できたのは単なる偶然だったのか？

残念ながら，それから30年も経った現在でも，この問いに対する完全な解答は得られていない．もちろん進展が全くなかったわけでもない．当時，非線形力学の一分野としての可積分な力学系への関心が高まる中で，大きな進展がロシアであった．ジグリン（Ziglin）による寄与である．実際筆者もこのジグリンの結果をもとに，ハミルトン系の可積分性の必要条件をある簡単なアルゴリズムの形で与えることができ，ヨーロッパでの流浪生活を終える等，その後の生活の糧とした．しかしその後，世紀の変わり目にモラレス・ラミス（Morales–Ramis）というスペイン・フランス連合に先を越される羽目となり現在に至っている．

もし20代の半ばでこのコワレフスカヤのコマに出会うことがなかったら，その後の自分は一体何をしていたのだろうか，と時々思うことがある．本誌の記事を書いたことを含めて，この出会い（Encounter）はあまりにも大きく筆者に影響を与えてきた．

（よしだ・はるお，国立天文台理論研究部）

リレー連載

人物で学ぶ数学

創始者の思考で学ぶ

第1回

連載を始めるに当たって

砂田 利一

1. はじめに

渡辺一夫著『フランス・ルネサンスの人々』(岩波文庫)は,ヨーロッパ,特にフランスにおけるルネサンスが,「暗黒」の中世に長く圧殺されていた人間精神の自由を獲得する時代を象徴しているにも関わらず,同じ時代に勃発した宗教改革の暴力と迫害に否応なく巻き込まれた様々な人物を採り上げている.そして,宗教戦争を引き起こした人間の愚かさと,近代の開幕に導く時代を形作ったユマニストたちの理想を見事に対比させ,この過酷な時代に彼らが「いかに生き,いかに考えたか」を,柔らかな筆致の文章で語りかけている*1).

ルネサンスというと,我々は文化史の中の時代区分の一つとして大まかに理解しがちであるが,この本に描かれているように,その時代の人々のそれぞれの「生き様」を知ることにより,当時起きた事件を時系列で挙げていくよりは,時代の「息遣い」を一層体感することができるのである.ツヴァイクの『エラスムスの勝利と悲劇』(内垣啓一,藤本淳雄,猿田恵訳,みすず書房)を読んだときも同じ感想を持ったことを覚えている.

さて,筆者に課せられているのは,「人物で学ぶ数学」の連載に当たって,序文のようなものを書くことある.ではなぜ『フランス・ルネサンスの人々』の話から始めたのか,読者は訝しく思うに違いない.理由は単純である.ジャンルは異なるとは言え,人物を描くという意味では本連載に全く無関係ではない.

たまたま機会に恵まれて,昨春(2010年4月)に幾何学の歴史に関する本を出版した[1)].その執筆の過程で考えたことがある.一般に科学史を書こうとするとき,大きく分けて2つの方法がある.人物は名前を挙げるだけに留め,科学そのものの発展に的を絞るか,『フランス・ルネサンスの人々』のように科学に携わった人物を中心にして描くか,という2つの方法である.そのどちらにも長所・短所がある.長考した挙句,執筆に当たっては結局折衷案を採ることにした.幾何学の歴史を描くとともに,その中に数学を創ってきた人々の物語を埋め込むことにしたのである.とはいうものの,今でも,人物に焦点を絞った書き方に魅力を感じているのが正直なところである(例えば文献6,7)).

本連載では後者の方法を採用し,斯界の権威にお願いして,数学の歴史に名を残す人々をそれぞれの視点から採り上げてもらう.その目的は数学者の人物像を読者に伝えることを通して,数学と

*1) 終戦直後から書き始められたということもあり,著者の心にはアジア諸国に多大の被害を与えた戦争のことがあったに違いない.

は何か，何を目指しているかを理解してもらうことである．

数学とは何かを伝えることに関連して，ここで少々愚痴をこぼすことを許してもらいたい．数学という学問が古代ギリシャに誕生して二千数百年，その間に数多の人々が数学の「深化」に貢献してきた．それは人間精神の深化と軌を一にする．いわゆる科学技術の進化と異なり，数学の「深化」は直接目に見えるものではない．それが，数学の「社会的地位」を低くし，「忘れられた学問」などというレッテルを貼られる要因となっている．出来合いの数学しか必要としていない他分野の研究者は（皆ではないが），数学者を一般教育の要員としか考えず，数学研究は「余暇」に行えばよいと考えている．また，諸科学において数学が及ぼす広範な影響にも関わらず，科学政策における数学者の発言はほとんど無視される．

特に「基盤的」数学への無理解は目を覆いたくなる．この状態を打開するにはどうしたらよいのだろうか．一挙に変化を求めるのは困難だろう．地道な発信を続けるほかない．本連載が，その一助になればと期待している．

愚痴ばかり言っていても始まらない．ここでは筆者が興味を持つ二人の数学者を採り上げ，それを以って連載の序に代えることにしたい．

2. ユードクソス

ユークリッド（ユークレイデス）の名前は聞いたことがあるが，ユードクソスについては知らないという読者が多いだろう．ユードクソス（前408年–前355年）は，小アジア（現トルコ）の西端に位置するクニドス出身の数学者である．クニドスはピタゴラスの生まれたサモス島の北に位置する．ユードクソスはピタゴラス学派の系統にあるアルキタスに学び，その影響で立方体の倍積問題や数論，音楽理論に興味を持ったと言われる．

クニドスからアテネに渡り，プラトンの学園（アカデメイア）に「在籍」していたこともある．伝えられるところでは，貧しさのため，彼の住処からアカデメイアまでの相当な距離を毎日歩いて通っていたと言われる．また，一説ではプラトンと意見が合わず，プラトンの分析能力に疑いを持ったとも言われる．二人の間でどのような会話がなされたのか興味津津であるが，何も伝わっていない．当然，数学という学問の性格に関する「本質的」議論があったはずである．プラトンが彼の哲学を展開するに当たり，数学的思考や概念をモデルにしていたことはよく知られていることである．

清貧とも言えるユードクソスであるが，友人の金銭的援助によりエジプトに滞在した時期がある．このとき，ヘリオポリスの神官に教えを受けながら天文学を研究し，天文台での観測も行った．その後，各地を旅行しながら次第に名声を確立し多くの弟子を得るに至る．故郷のクニドスの戻ったときには民衆から歓呼の声で迎えられ，議員に選出されたりしたが，学術的な面でも仕事を続け，神学，天文学，気象学など多岐に渡る分野の書物を書いた．残念なことに，そのすべてが湮滅している．幾何学については5巻からなる『原論』を書いたと言われるが，これも残っていない．しかし，ユードクソスの数学については，喜ばしいことに間接的に彼の業績が現代に伝えられている．ユークリッドが著した『原論』13巻に彼の業績が埋め込まれているからである．

ユードクソスについて特筆すべきこと，それは彼の数学精神が2300年の時を超えて19世紀の近代数学に直接・間接に接続していることである．一つは，無限論理であり，もう一つは比例の理論である．

無限論理は無限大，無限小の曖昧な理解が引き起こす誤謬を避けるために考案された論法であり，通常「取り尽しの方法」あるいは「積尽法」と呼ばれている*2)．実際には背理法との組合せで使われており，当時の数学（幾何学）の限界もあって使い方には制限があるが，現代の無限論理であるイプシロン–デルタ論法に直接結びつく論理である．『原論』では，面積・体積の理論でこの論法が効果的に使われている．例えば，三角錐（四面体）の体

*2) この呼称はギリシャ語の「2重帰謬法」の誤訳から生じたということを長岡亮介氏から指摘された．

積が，同じ底面と高さを持つ三角柱の体積の 1/3 であることの証明が代表的なものである[2~4]．

比例の理論は『原論』の第５巻に詳述されているが，これはユードクソスの理論をほぼそのまま引用していると考えられている．ピタゴラスによる協和音の理論に起源を持つ比例の理論は，後にユークリッドの互除法や連分数の理論の雛形になるのであるが，ピタゴラス学派に属す数学者により通約的でない比*3)が発見されるまでは，線分の比は常に通約可能という仮定の下で幾何学が展開されていた．すなわち，通約的でない比の存在はそれまでの幾何学に根本的な変革を迫ったのである．この困難を乗り切ったのがユードクソスであった．

彼のアイディアは，19 世紀末に確立した実数論，特にデデキントによる「切断」の理論に直結している．数概念は，理論と歴史の双方の観点から，自然数，整数，有理数，実数というように段階的に概念把握がなされてきたのであるが，ユードクソスのアイディアは，有理数の「世界」の中で実数を「生成」する方法を示唆していたのである[5]．

無限論理にしても，比例の理論にしても，時代を超えたユードクソスの業績は数学の一つの特質を表している．すなわち，「数学の発見は決して忘れ去られることはない．価値も失われないし，死にもしない．ただ外観が変化するだけである」(J.W.N. Sullivan)．

3. ヒッパティア

筆者が興味を持つもう一人の数学者はヒッパティア (Hypatia；350 頃–415) である．ヒッパティアはアレキサンドリアの数学者テオンの娘であり弟子でもあった．アレキサンドリアでは，ローマ人の理論的科学への無関心とは異なり，ギリシャ・ヘレニズム文化を継承して，数学研究の伝統を守っていた．ヒッパティアはこの流れに位置し，数学の歴史上，最初に登場した女性の学者である*4)．彼女は稀に見る才能と雄弁，謙虚，清楚さで知られるが，その人生は悲劇的な死で幕を閉じることとなった．それは『フランス・ルネサンスの人々』に描かれたような狂信的信者が引き起こした悲劇である．

キリスト教会が宗教的にも世俗的にも大きな力を持ち始めた時代である．どの宗教にも見られるように，初期のキリスト教信者は極めて排他的であり，教義伝播の過程で，他の宗教に対して不寛容であった．一方，ヒッパティアの思想的基盤は，多神教の上に打ち立てられたギリシャ文化である．初期の教会は多神教に強い嫌悪感を持ち，それを背景に発展してきた科学に警戒心を抱いていた．科学と哲学の教師として，当時の増大するキリスト教会の力に抗してギリシャ文化を守ろうとしていた彼女は，当然キリスト教信者からは敵視されていた．415 年，この地で反ギリシャ暴動が勃発したとき，ヒッパティアはキリスト教徒の群集により惨殺され，遺体は無残にも引き裂かれたのである*5)．それは，アレキサンドリアの図書館が完全に破壊されたときでもあった．

残念なことに，ヒッパティアの業績は闇の中に消え去って，現代には伝わらない．彼女の名が残るのみである．その後，女性の数学者が登場するまでには 1000 年を越す時間を必要とした．

ヒッパティアの悲劇的死は，宗教と科学の問題を想起させる．ご存知のように，宗教と科学は現代でもデリケートな関係にある．アレキサンドリアやルネサンス期に起きた宗教と科学の相克は，時代は遠く隔たるとは言え，今日でも形を変えながら続いているのである．

いかなる宗教であれ，狂信者は人類を不幸にする．『フランス・ルネサンスの人々』の著者が何度も引用しているように，キリストの名の下に無辜の民を殺し，残虐な拷問を行った狂信者に対して，「それはキリストと何の関係があるのか？」(Quid haec ad Christum?) と呟いたユマニストたちの素朴な問いかけは，現在でも大きな意味を持っているのである．

*3)　現代の言葉で言えば比の値が無理数となるもの．

*4)　伝説では，ピタゴラスの妻であったテアノが数学の書物を書いたと伝えられている．

*5)　彼女の壮烈な死は，ソクラテス・スコラティクスにより描かれている（“Historia Ecclesiastica”；450 年頃）

参考文献

1) 砂田利一,『現代幾何学への道—ユークリッドの蒔いた種—』, 岩波書店, 2010 年.
2) 砂田利一,『分割の幾何学—デーンによる 2 つの定理をめぐって—』, 日本評論社, 2000 年.
3) 砂田利一,『新版　バナッハ・タルスキーのパラドックス』, 岩波書店, 2009 年.
4) 志賀浩二・砂田利一,『高校生に贈る数学 III「面積と体積」』, 岩波書店, 1996 年.
5) 砂田利一,「完備性をめぐって」, 数学のたのしみ, 1997 年第 1 号から 6 回連載, 日本評論社.
6) ヨアン・ジェームス (蟹江幸博訳),『数学者列伝　オイラーからフォン・ノイマンまで I, II』, シュプリンガー・ジャパン, 2005 年, 2007 年.
7) 志賀浩二,『数の大航海』, 日本評論社, 1999 年.

(すなだ・としかず, 明治大学理工学部)

リレー連載

現象から方程式を創り出す

第12回 —立式で鍛える論理的思考法—

ファインマンによるマクスウェル方程式の「証明」

十河 清

1. はじめに

1948年10月31日，コーネル大学の彼の部屋で，ファインマンはプリンストンからやってきたダイソンを前に，ある講義をした．その内容は「粒子に対するいくつかのもっともらしい量子力学的方程式の仮定の下に，マクスウェル方程式を証明・導出する」という驚くべきものであった．

私たちは通常，マクスウェル方程式に限らずニュートン方程式とかシュレーディンガー方程式などいわゆる基礎方程式と呼ばれるものは，「導出される」ものではなく，与えられたものとして「仮定する」ものであると教わる．時には，それらが成り立つ状況証拠についての物理的な議論や，発見法的な推論が提示されることもあるが，それらは数学的な証明とは言い難い．また，作用積分の変分によるオイラー・ラグランジュ方程式として「導出される」こともあるが，この場合には出発点となるラグランジアンを選んだ段階で，方程式は与えられたに等しいとも言える．

ファインマン自身は当時この仕事の価値について否定的で，公表することなく終わってしまった．この仕事が公になったのは，ファインマンの死後にダイソンが「コーネルにおけるファインマン」と題した講演でそのことに触れてからである[1]．その詳細についての問合せの多さに促されて，ダイソンは「Feynman's proof of the Maxwell equations」と題する論文を発表したのである[2]．

本稿の目的は，第一にこのダイソン論文の内容について紹介・解説すること，第二にこのファインマンの仕事の意義と限界についてのあれこれを議論すること，第三にこれらを通して一風変わった「ゲージ理論再入門」となるような記事を読者に提供することである．

「歴史に『もしも』はない」とはよく言われるのだけれども，もしかするとファインマンはこのとき，後に「ヤン・ミルズ理論」と呼ばれることになる非可換ゲージ理論を発見し損なったのではないか，と筆者は想像するのである．本稿の読了後に，筆者のこの空想にどの程度共感していただけるであろうか．

2. マクスウェル方程式の「証明」

ダイソンによると，当時の講義ノートを紛失してしまったので，文献2)を書くに際して改めて記憶を辿って再構成したのだという．本稿の基礎となるその文献2)はしかしながら，現代の電磁気学の記法に沿わないところやミスプリントが散見されるので，以下では断りなく現代風の記法（すな

わち MKSA-SI 単位系）に代えて紹介する．

2.1 ファインマンによる証明

質量 m を持つ粒子に対する（量子力学的な）ニュートンの運動方程式

$$\text{（仮定 1）}\quad m\ddot{x}_j = f_j(x, \dot{x}, t) \tag{1}$$

から出発する (添字 $j = 1, 2, 3$)．ここで，座標 x，速度 $\dot{x}$ および力 f は量子力学的演算子と考えて，さらに交換関係

$$\text{（仮定 2）}\quad [x_j, x_k] = 0, \tag{2}$$

$$\text{（仮定 3）}\quad m[x_j, \dot{x}_k] = i\hbar\delta_{jk} \tag{3}$$

を仮定する（$i = \sqrt{-1}$）．このとき，以下の関係式が導かれる，というのがファインマンの発見したことである．すなわち，場 $E(x,t)$，$B(x,t)$ が存在して，力 f はローレンツ力の形式

$$\text{（結論 1）}\quad f_j = E_j + \epsilon_{jkl}\dot{x}_k B_l \tag{4}$$

に書かれる．ここで，2 回登場する添字は和を取る，というアインシュタイン規約を採用している．さらに，$E(x,t)$，$B(x,t)$ はマクスウェル方程式

$$\text{（結論 2）}\quad \mathrm{div}\ B = 0, \tag{5}$$

$$\text{（結論 3）}\quad \mathrm{rot}\ E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

に従う（ダイソンに倣って，この節ではベクトルを太字にしない）．

式 (5) と (6) は 4 つあるマクスウェル方程式の半分である．残る半分の

$$\mathrm{div}\ E = \rho/\epsilon_0, \tag{7}$$

$$\mathrm{rot}\ B - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t} = \mu_0 j \tag{8}$$

は，電荷密度 ρ および電流密度 j の**定義式**とみなす．正確に言うと，今の場合の ρ，j は，電荷密度と電流密度のさらに電荷倍である（後出の注 3 を参照）．これらを「定義式」とするのは少々不満であるが，ともかくそれがファインマンの主張である．なお，$\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ の関係がある（c は光速度）ことは周知であろう．

証明に入る前に，蛇足かもしれない注を読者のためにいくつか付けておく．

注 1：（仮定 3）に似た交換関係として，運動量 p との間の交換関係

$$[x_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}$$

は馴染みであろう．早合点な読者は $p = m\dot{x}$ であるから，これらは同じものであると思うかもしれないが，実はそうではない．今の場合は，一般に $m\dot{x} \neq p$ であり，**速度**との間の交換関係 (3) は以下で本質的な役割をする「自明でない仮定」なのである．

注 2：記号 ϵ_{jkl} は 3 次元の完全反対称テンソルと呼ばれ，添字 j, k, l がすべて相異なる場合にのみゼロと異なり，その値は $\epsilon_{123} = +1$ として，添字の順序がその偶置換のときは $+1$，奇置換のときは -1 となる．従って，式 (4) はベクトル積を用いた等式

$$f = E + \dot{x} \times B$$

と同じである．この形のほうが馴染みであろう．

注 3：上記のローレンツ力の式には，普通はあるはずの粒子の電荷 e が現れていない．この場合の電荷は E, B の中に含めていると考えるのである（従って，これらは通常の電場や磁束密度のさらに電荷倍の次元を持つ）．さらに言うと，実は粒子の電荷がゼロの場合でも，これらの（結論 1～3）は正しいのである．ただしその場合，E, B は電場と磁束密度という意味は持たない．例えば，通常のポテンシャル力の場合は $E = -\mathrm{grad}\ U$ であるし，コリオリの力の場合は $B = 2m\omega$ で与えられる．これらが方程式 (5) と (6) を満たすことは容易に確認できる．

注 4：式 (5) と (6) はランダウ・リフシッツ『場の古典論』では「マクスウェル方程式の第 1 の組」，式 (7) と (8) は「マクスウェル方程式の第 2 の組」と呼ばれており，この 2 組は互いに数学的に異質な性格を持っている．詳しくは次節で述べるが，ファインマンの証明は「上記 3 つの仮定から第 1 の組が必然的に導かれる」ことを主張しているのである．

証明の概略

まず式 (3) の両辺を時間 t について微分して（積の微分である），式 (1) を代入すると

$$[x_j, f_k] + m[\dot{x}_j, \dot{x}_k] = 0 \tag{9}$$

を得る（右辺は定数の微分からゼロ）．

ここで，ヤコビの恒等式

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0$$

の成立に注意する．この証明は簡単で，交換子積の定義に従って，例えば第 1 項は

$$\begin{aligned}[A,[B,C]] &= A(BC - CB) - (BC - CB)A \\ &= ABC + CBA - ACB - BCA\end{aligned}$$

となる．残り 2 つも同様に展開すれば，これらが互いに打ち消し合うことが容易にわかる．

そこで $A = x_l$, $B = \dot{x}_j$, $C = \dot{x}_k$ と置けば

$$\begin{aligned}&[x_l,[\dot{x}_j,\dot{x}_k]] + [\dot{x}_j,[\dot{x}_k,x_l]] \\ &\qquad + [\dot{x}_k,[x_l,\dot{x}_j]] = 0\end{aligned} \tag{10}$$

を得る．これは，式 (3) と (9) を用いれば

$$[x_l,[x_j,f_k]] = 0 \tag{11}$$

を意味する（定数との交換子積はゼロだから）．

一方で，式 (9) において文字 j, k を入れ替えたものを辺々加えると

$$[x_j, f_k] + [x_k, f_j] = 0 \tag{12}$$

を得るから，$[x_j, f_k]$ は添字に関して反対称であることがわかる．よって

$$[x_j, f_k] = -\frac{i\hbar}{m}\,\epsilon_{jkl}B_l \tag{13}$$

と書くことができる．式 (13) は，一般に $x, \dot{x}, t$ に依存する場の量 B の定義式であるが，式 (11) によれば

$$[x_l, B_m] = 0 \tag{14}$$

が成り立つから，実際には B が $\dot{x}$ には依らず x, t のみに依存することがわかる．

こうして磁束密度 $B(x,t)$ が導入された．次は電場 E であるが，こちらは式 (4) すなわち

$$E_j = f_j - \epsilon_{jkl}\dot{x}_k B_l$$

をもって，その定義式とする．再び，E は一般に $x, \dot{x}, t$ に依存する場の量であるが，式 (3), (13), (14) から

$$[x_m, E_j] = 0 \tag{15}$$

を得るので，E も $\dot{x}$ には依らず x, t のみに依存することがわかる．

B の定義である式 (13) は，式 (9) を使えば

$$B_l = -\frac{im^2}{2\hbar}\,\epsilon_{jkl}[\dot{x}_j, \dot{x}_k] \tag{16}$$

と書くことができる．実際

$$\epsilon_{jkl}B_l = -\frac{im^2}{\hbar}[\dot{x}_j, \dot{x}_k]$$

と等式 $\epsilon_{jkl}\epsilon_{jkl'} = 2\delta_{ll'}$ から式 (16) を得る．

今度はヤコビ恒等式において，$A = \dot{x}_j$, $B = \dot{x}_k$, $C = \dot{x}_l$ と置けば

$$\epsilon_{jkl}[\dot{x}_j,[\dot{x}_k,\dot{x}_l]] = 0 \tag{17}$$

が成り立つ．式 (16) と (17) から

$$[\dot{x}_l, B_l] = 0 \tag{18}$$

を得る（l について和を取っていることに注意）が，これから式 (5) が導かれる．それには，ある $A(x,t)$ が存在して，式 (3) の $m\dot{x} = p - A$ と書けることに注意すれば良い（A はベクトル・ポテンシャルの電荷倍）．このとき，$p = -i\hbar\nabla$ を使えば

$$m[\dot{x}_l, B_l] = [-i\hbar\nabla_l - A_l, B_l] = -i\hbar\,\mathrm{div}B$$

だからである．なお，この変形には「落とし穴」が一つあり，それについては次節で述べる．

残る式 (6) は以下のように導出される．式 (16) の両辺を時間 t に関して全微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}B_l &= \frac{\partial B_l}{\partial t} + \dot{x}_m\frac{\partial B_l}{\partial x_m} \\ &= -\frac{im^2}{\hbar}\epsilon_{jkl}[\ddot{x}_j, \dot{x}_k]\end{aligned} \tag{19}$$

となる．ここで式 (1) と (4) を使えば，式 (19) の右辺は以下のように書き直される．このとき，完全反対称テンソル ϵ_{jkl} の性質 $\epsilon_{jkl}\epsilon_{jmn} = \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}$ に注意すると変形過程が見やすい．

$$\begin{aligned} &-\frac{im}{\hbar}\epsilon_{jkl}[E_j + \epsilon_{jmn}\dot{x}_m B_n, \dot{x}_k] \\ &= -\frac{im}{\hbar}(\epsilon_{jkl}[E_j, \dot{x}_k] + [\dot{x}_k B_l, \dot{x}_k] - [\dot{x}_l B_k, \dot{x}_k]) \\ &= \epsilon_{jkl}\ \frac{\partial E_j}{\partial x_k} + \dot{x}_k \frac{\partial B_l}{\partial x_k} - \dot{x}_l \frac{\partial B_k}{\partial x_k} \\ &\quad + \frac{im}{\hbar} B_k[\dot{x}_l, \dot{x}_k]. \end{aligned} \tag{20}$$

ここで，右辺の最後の項は式 (16) により対称性からゼロとなる．また第 3 項は式 (5) によりゼロとなる．第 2 項は式 (19) の左辺第 2 項と同じで，互いに打ち消し合う．以上から

$$\frac{\partial B_l}{\partial t} = \epsilon_{jkl}\ \frac{\partial E_j}{\partial x_k} \tag{21}$$

を得るが，これは式 (6) に他ならない．念のためにその確認を書いておこう．例えば $l = 3$ とすれば，ϵ_{jk3} があるから j, k は $(1, 2)$ の組合せだけが残る：

$$\frac{\partial B_3}{\partial t} = \frac{\partial E_1}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_1} = -(\mathrm{rot}\ E)_3$$

これは式 (6) の第 3 成分である．（**証明終**）

2.2 ダイソンによる注釈

以上が，ダイソンによるファインマンの証明の再構成である．ご覧のように，電場 E と磁束密度 B のみを使い，ゲージ・ポテンシャルはあらわに登場しない．従って，ゲージ不変性の問題も表面上に現れない証明であることが特徴である．

文献 2) では，この後にファインマンのこの仕事の動機が「新しい理論の発見」にあった，というダイソンの注釈が続く．それが，マクスウェル方程式導出の成功にも拘らず，なぜこの仕事を彼が理論的な失敗と考えたのかの理由だというのである．

1948 年当時の時代背景として，湯川の非局所場理論・ボルンの相反理論・ハイゼンベルグの普遍混合理論など，理論物理学のラディカルな再構築の機運が高かった点を考慮しなくてはならない，とダイソンは書いている．

1948 年といえば，ファインマンが彼の量子電磁気学理論（QED）の骨格を完成し，有名な連作論文を執筆していた時期でもある．先発遅延作用とか，経路積分による量子力学の再構成など，彼が理論の最大限の拡張可能性を追求していたことがよくわかる．

「失敗理論である」というファインマン自身の判断に反対して，ダイソンは一つの問題を提出して文献 2) を終えている．それは，上記の議論では「ガリレイの相対性に従うニュートン方程式からアインシュタインの相対性に従うマクスウェル方程式が導かれた」かのように見えるが，どうしてそんなことがあり得るのか，というものである．

そこで次節では，以上の議論を相対論的に拡張し，その上で「もしかしたらファインマンは，彼が望んでいた新理論＝非可換ゲージ理論を発見できていたかもしれない」という筆者の想像の根拠を説明しよう．

3. ファインマン理論の意義と限界

3.1 議論の相対論的拡張

前節の議論を相対論的に拡張する．以下では表記の簡単化のために，$\hbar = 1, c = 1$ の「自然単位」を採用する．なお，$c = 1$ は積 $\epsilon_0\mu_0 = 1$ を意味するだけだが，ついでに個別に $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$ であるとしよう．こうすれば，方程式のあちこちに余分なパラメータが現れないで済むからである．必要なときに元の単位系に戻ってこれらのパラメータを復活させるのは，それほど難しくない．

さらに，添字の上付き・下付き，すなわち変数の反変と共変の区別を採用して，相対論的不変性などの対称性の見通しを良くする．例えば，ミンコフスキー時空の反変座標・共変座標はそれぞれ

$$\begin{cases} (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (+t, \boldsymbol{x}), \\ (x_\mu) = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (-t, \boldsymbol{x}) \end{cases}$$

で与えられる．すなわち，計量として

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$$

を採用し

$$-ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + d\boldsymbol{x}^2 \qquad (22)$$

とするのである．

以上の準備の下に（仮定 1～3）の相対論的な拡張は（$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$）

$$\text{（仮定 1）}\quad m\ddot{x}^\mu = f^\mu, \qquad (23)$$

$$\text{（仮定 2）}\quad [x^\mu, x^\nu] = 0, \qquad (24)$$

$$\text{（仮定 3）}\quad m[x^\mu, \dot{x}^\nu] = ig^{\mu\nu} \qquad (25)$$

となる．ただし，ドット微分は t ではなく，**固有時 s に関する微分**を意味する．このとき例えば，4 元速度 $u^\mu \equiv \dot{x}^\mu$ は

$$(u^\mu) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right)$$

である（$\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{x}/dt$）．$u^\mu u_\mu = -1$ に注意．

ファインマンはポテンシャルをあらわに用いなかったが，4 元速度 $u^\mu = \dot{x}^\mu$ が 4 元運動量 p^μ との間で，**ゲージ・ポテンシャル** $A^\mu(\boldsymbol{x}, t)$ を介して

$$m\dot{x}^\mu = p^\mu - eA^\mu \qquad (26)$$

の関係があることを使うのが便利である．ここで

$$(p^\mu) = (+E, \boldsymbol{p}), \quad (A^\mu) = (+\phi, \boldsymbol{A}),$$

$$(p_\mu) = (-E, \boldsymbol{p}), \quad (A_\mu) = (-\phi, \boldsymbol{A})$$

である．ただし，本節では通常通りゲージ・ポテンシャル A^μ には電荷 e を含めずに導入した．

相対論的量子力学では，置き換え

$$(p^\mu) = (-i\partial_\mu) = \left(+i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla\right) \qquad (27)$$

を仮定すれば，交換関係 (25) が満足される．実際

$$[x^0, p^0] = [t, +i\partial/\partial t] = -i,$$

$$[x^1, p^1] = [x, -i\partial/\partial x] = +i$$

であり，$m\dot{x}_\mu$ は共変微分 D_μ を用いて $m\dot{x}_\mu = -iD_\mu$ と書ける．ここで，式 (26) より

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu(\boldsymbol{x}, t) \qquad (28)$$

である．

このとき，ローレンツ力は 4 元形式で

$$\text{（結論 1）}\quad f^\mu = e\, F^{\mu\nu} u_\nu,$$

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \qquad (29)$$

と書かれる．よって，電磁場の強さ $F^{\mu\nu}$ は，行列形式

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる．ここで

$$\boldsymbol{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} \qquad (30)$$

である．念のため，4 元ローレンツ力 f^μ を具体的に書いておけば

$$f^0 = \frac{e}{\sqrt{1-v^2}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}, \qquad (31)$$

$$\boldsymbol{f} = \frac{e}{\sqrt{1-v^2}} (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \qquad (32)$$

となる．

次に，結論 2 と結論 3 であるマクスウェル方程式の第 1 の組は，非相対論の場合の式 (17) にパラレルなヤコビ恒等式

$$\text{（結論 2 \& 3）}\quad \epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}[\dot{x}_\nu, [\dot{x}_\rho, \dot{x}_\lambda]] = 0 \qquad (33)$$

として表現される．ここで $\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}$ は 4 次元完全反対称テンソルと呼ばれ，3 次元のそれと同様に $\epsilon^{0123} = 1$ とその偶置換は 1，奇置換は -1 で，それ以外はゼロである．既述のように $\dot{x}_\mu$ は $m\dot{x}_\mu = -iD_\mu$ と共変微分で書けるので，式 (33) は

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda}[D_\nu, [D_\rho, D_\lambda]] = 0 \qquad (34)$$

とも書ける．このような共変微分の場合のヤコビ恒等式は特に「ビアンキ恒等式」とも呼ばれている．式 (28) を使えば

$$[D_\mu, D_\nu] = -ie\, F_{\mu\nu} \qquad (35)$$

であるから，双対場 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ を

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\lambda} F_{\rho\lambda} \qquad (36)$$

によって定義・導入すれば，式 (34) は

$$\text{（結論 2 \& 3）}\quad [D_\nu, \tilde{F}^{\mu\nu}] = 0 \qquad (37)$$

とも書ける．双対場 $\tilde{F}^{\mu\nu}$ は，式 (36) を具体的に計算すると

$$(\tilde{F}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}$$

のようになるので，$F^{\mu\nu}$ と $\tilde{F}^{\mu\nu}$ を較べて，双対変換 $F \to \tilde{F}$ とは電場と磁束密度の変換 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}) \to (\boldsymbol{B}, -\boldsymbol{E})$ を意味することがわかる．

というわけで，マクスウェル方程式の第 1 の組の相対論版は，もっとも一般的に式 (37) のように表わされることがわかった．これは $\mu = 0$ のとき，式 (18) に他ならない（$m\dot{x}_l = -iD_l$, $\tilde{F}^{0l} = B_l$ であるから）．同様にして，$\mu = 1, 2, 3$ のときは式 (21) を導くことがわかる（例えば $\mu = 1$ のときは $\tilde{F}^{10} = -B_x, \tilde{F}^{12} = -E_z, \tilde{F}^{13} = E_y$ だから）．

かくして，ファインマンはマクスウェル方程式の第 1 の組の出所がヤコビ・ビアンキ恒等式にあることを正しく見抜いていたと言うことができる．式 (26) のゲージ場の仮定は，3 番目の仮定である式 (25)（あるいは式 (3)）の交換関係と本質的に同じであり，このときゲージ場の強さ $\tilde{F}^{\mu\nu}$ は必然的に式 (37) を満たさねばならないのである．

3.2 非可換ゲージ場—ヤン・ミルズ理論

驚くべきことに，以上の議論は非可換ゲージ場の場合も，**ほとんどそのまま成り立っている**のである．変更点は，ゲージ・ポテンシャル A_μ が一般にゲージ群のリー代数に値を取ること（行列になると思えば良い）と，それゆえ場の強さ $F_{\mu\nu}$ が

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{1}{(-ie)}\,[D_\mu, D_\nu] \\ &= \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - ie[A_\mu, A_\nu] \qquad (38) \end{aligned}$$

のように変更される（右辺の交換子積の項が行列の非可換性のために残る）ことの 2 点だけである．

従って，ビアンキ恒等式 (34) とか，双対場 $\tilde{F}_{\mu\nu}$ の定義式 (36) は，そのまま使えて，式 (37) が第 1 の組のゲージ場方程式となるのである．

繰り返すと，可換ゲージ場であるマクスウェル方程式の場合は $D_\nu = \partial_\nu - ieA_\nu$ に現れるゲージ・ポテンシャル A_ν は $\tilde{F}^{\mu\nu}$ と交換するから，式 (37) は

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \qquad (39)$$

と書けるが，非可換の場合はそうではなく

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = ie[A_\nu, \tilde{F}^{\mu\nu}] \qquad (40)$$

のように右辺が残るのである．

ちなみに，第 2 の組のゲージ場方程式は，やはり相対論的形式で

$$[D_\nu, F^{\mu\nu}] = j^\mu \qquad (41)$$

と書けることに注意しておこう．結局，式 (37) と (41) という互いに相似な方程式系が一般のゲージ場理論における基礎方程式となる．

さて，以上の議論を振り返れば，ファインマンが式 (18) から

$$[\dot{x}_l, B_l] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{div}\ \boldsymbol{B} = 0 \qquad (42)$$

と結論したところが極めて問題だったことがわかる．もちろん，可換なマクスウェル電磁場の場合はこれで正しいのであるが，そこで立ち止まって別の可能性を考えていれば，と思うのである．

ワイルに始まってシュレーディンガー，ロンドン，クライン，パウリなどの仕事により，非可換ゲージ理論への胎動が始まっていた時代であったから[3]，あり得たかもしれない歴史であると思う．ヤンとミルズが彼らの理論を発表したのは，この 6 年後の 1954 年のことであった．

参考文献

1) F.J. Dyson, *Phys. Today* **42** (1989) 32;『ガイアの素顔—科学・人類・宇宙をめぐる 29 章』（工作舎）．
2) F.J. Dyson, *Am. J. Phys.* **58** (1990) 209.
3) L. O'Raifeartaigh, *The Dawning of Gauge Theory* (Princeton Univ. Press, 1997).

（そごう・きよし，北里大学理学部）

情報幾何の新展開
脳と情報の数理科学

第3回

双対平坦なリーマン空間

甘利 俊一

リーマン空間は一般に曲がっている．通常は平坦なリーマン空間とはユークリッド空間のことである．しかし，見方を変えれば新しい幾何学の世界が開ける．リーマン空間の長さを計る計量と，曲線の真っすぐ（方向が変わらない）という概念を分離して考える．その代わりに双対構造を導入する．ここでは，凸関数が導く双対平坦なリーマン空間を導入する．

3.1 凸関数とアファイン平坦性

平坦な空間（曲がっていない空間）とは，アファイン空間のことである．具体的には平坦な座標系（アファイン座標系）$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ が存在して，t をパラメータとするパラメータ表示で表した曲線 $\boldsymbol{x}(t)$,

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b} \tag{3.1}$$

を真っすぐな線（平坦な線，測地線）と定義する．ここに，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は定ベクトルである．A を $n \times n$ の非特異な行列，$\boldsymbol{c}$ を定数ベクトルとして，$\boldsymbol{x}$ から $\tilde{\boldsymbol{x}}$ への座標系のアファイン変換

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c} \tag{3.2}$$

を施しても測地線は測地線に移り，その形を変えない．座標軸自身は測地線である．測地線 (3.1) はどの場所でもその方向（正確には接線のベクトル）が $\boldsymbol{a}$ で同じである．つまり，方向を変えない．これはユークリッド空間の直線の持つ一つの性質で，その一般化といえる．前に述べたように，2 点間を結ぶ長さが最小であるという直線のもう一つの性質はこれとは別である．距離の最小性と方向不変性という，ユークリッド空間では一致する 2 つの性質が，双対平坦

なリーマン空間では分離する[*1)].

一般の座標系を用いて平坦性を議論するには，アファイン接続が必要であり，そこから導かれるリーマン・クリストッフェル曲率が 0 になるような空間が平坦である．このとき，この空間にアファイン座標系が存在する．ダイバージェンスからアファイン接続を導く話は後の回で行う．ここでは，いきなり次のように平坦性を考える．

座標系 $\boldsymbol{x}$ と凸関数 $\psi(\boldsymbol{x})$ が与えられたときに，この空間に平坦性を導入し，アファイン座標系を $\boldsymbol{x}$ とする．凸関数は，アファイン変換 (3.2) を施しても凸のままであるからアファイン不変な概念である．アファイン平坦性は，計量（線分の長さ）に関しては何も言わない．もし，平坦性に加えて，接空間に内積が定義されていて，アファイン座標の基底ベクトル $\{\boldsymbol{e}_i\}$ に対する内積

$$g_{ij} = \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle \tag{3.3}$$

が場所 $\boldsymbol{x}$ によらずに一定であれば，それはユークリッド空間である．特に (g_{ij}) が単位行列になる場合には，$\boldsymbol{x}$ は正規直交座標系である．

しかし，ダイバージェンスから導かれる計量は，一般の凸関数による場合，

$$g_{ij}(\boldsymbol{x}) = \partial_i \partial_j \psi(\boldsymbol{x}) \tag{3.4}$$

であった．これは場所 $\boldsymbol{x}$ による．だから，この空間は平坦性に関してはアファイン空間であるが，計量に関してはリーマン空間であって，ユークリッド空間ではない[*2)]．もちろん，凸関数が $\psi(\boldsymbol{x}) = (1/2)\sum x_i^2$ で与えられる特殊な場合は，

$$g_{ij}(\boldsymbol{x}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3.5}$$

となってユークリッド空間になる．この場合，双対座標 $\boldsymbol{x}^*$ は $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}$ でもとの座標に等しいから，この 2 つは同じもので，空間は自己双対になる．

3.2 双対平坦性

凸関数を持つ平坦空間 S は，その双対座標 $\boldsymbol{x}^*$ と双対な凸関数 ψ^* をもとに，双対平坦性が定義できる．このとき，$\boldsymbol{x}^*$ が S の双対アファイン座標である．双対測地線は双対座標を用いて

$$\boldsymbol{x}^*(t) = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b} \tag{3.6}$$

のようにパラメータ表示で書ける．もちろん，双対測地線 (3.6) は，測地線 (3.1) とは違う．(3.6) を座標系 $\boldsymbol{x}$ で表せば，$\nabla\psi\{\boldsymbol{x}(t)\} = \boldsymbol{a}t + \boldsymbol{b}$ となるので $\boldsymbol{x}(t)$ は t の 1 次式では書けない．だから双対測地線はもとの座標系の測地線ではなくて曲がっている．

2 つの座標系が双対であるという意味は，実は計量に関係している．いま，ア

*1)　線形性（アファイン性）と計量とを分けて考え，後にこの 2 つが双対性で結ばれるところに双対微分幾何の極意がある．ユークリッド空間ではこの 2 つが一緒になるので，これは自己双対になっている．測地線とは字義どおりなら 2 点間の距離を定める線であるから，ここで定義する線 (3.1) は平坦線と呼んだほうが良いのかもしれない．

*2)　平坦性と計量とが分離していることがここからもわかる．

ファイン座標系 $\boldsymbol{x}$ を用いた自然基底（座標軸 x_i 方向のベクトル）を $\boldsymbol{e}_i$ としよう．また，双対座標系の自然基底を $\boldsymbol{e}_i^*$ と書く．このとき，基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ も $\{\boldsymbol{e}_i^*\}$ も一般には正規直交系ではない．ユークリッド空間を除けば，$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ は成立したい．つまり基底ベクトルどうしは直交していない．ところが，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ と基底ベクトル $\boldsymbol{e}_j^*$ はいつも直交している．

定理 3.1　2 つの双対基底系は双直交系である．すなわち，

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j^* \rangle = \delta_{ij}. \tag{3.7}$$

証明　まず，基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を，基底系 $\left\{\boldsymbol{e}_j^*\right\}$ を使って表してみる．このとき

$$\boldsymbol{e}_i = \sum g_{ij} \boldsymbol{e}_j^* \tag{3.8}$$

が成立する．これは，次のように導ける．$\boldsymbol{x}$ の微少な変化 $d\boldsymbol{x}$ と対応する $\boldsymbol{x}^*$ の微小な変化 $d\boldsymbol{x}^*$ を考える．両者は同じであるから，それぞれの基底を使って

$$d\boldsymbol{x} = \sum dx_i \boldsymbol{e}_i = \sum dx_i^* \boldsymbol{e}_i^* \tag{3.9}$$

と書ける．ところが，$\boldsymbol{x}^* = \nabla \psi(\boldsymbol{x})$ から

$$dx_i^* = \sum \partial_i \partial_j \psi dx_j = \sum g_{ij} dx_j, \tag{3.10}$$

これを用いれば (3.8) が出る*3)．さらに，内積は

$$\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = g_{ij}, \quad \langle \boldsymbol{e}_i^*, \boldsymbol{e}_j^* \rangle = g_{ij}^*, \tag{3.11}$$

だから，(3.8) より $GG^* = I$ または

$$G^* = G^{-1} \tag{3.12}$$

となるから (3.7) が成立する．これは，2 つの基底系が計量の意味で相反的または双対的であることを示している．

3.2.1 ベクトルの平行移動

ある点 $\boldsymbol{x}$ における接ベクトル $\boldsymbol{A}$ を，別の点 $\boldsymbol{y}$ に移動したとしよう．空間は平坦であるから，これは同じベクトル $\boldsymbol{A}$ に移る．しかし，その長さは変わってしまう．$\boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{x}$ 点での長さ $\|\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{x}}$ は計量 $G(\boldsymbol{x})$ を用いて

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{x}}^2 = \boldsymbol{A}^T G(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{A} = \sum g_{ij}(\boldsymbol{x}) A_i A_j \tag{3.13}$$

であるが，点 $\boldsymbol{y}$ では同じベクトルが長さは

$$\|\boldsymbol{A}\|_{\boldsymbol{y}}^2 = \boldsymbol{A}^T G(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{A} \tag{3.14}$$

で，一般に $G(\boldsymbol{x}) \neq G(\boldsymbol{y})$ だからこれは異なる．

2 つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の内積は，両者を他の点にアファイン的に移動すると（図 3.1），

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle_{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}^T G(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{B}, \quad \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle_{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{A}^T G(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{B} \tag{3.15}$$

となって変わってしまう．双対アファイン移動でも同じで，内積は平行移動によって保存されない．ここがユークリッド空間と違う．

*3)　接ベクトルを方向微分演算子とみる立場からは，$\boldsymbol{e}_i = \partial/\partial x_i$，$\boldsymbol{e}_i^* = \partial/\partial x_i^*$ である．したがって，偏微分の公式から $\partial/\partial x_i = \sum \left(\partial x_j^*/\partial x_i\right)\left(\partial/\partial x_j^*\right)$ が言える．この導出は，ずっと簡単である．

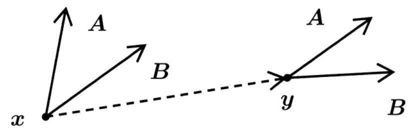


図 3.1　2 つのベクトルの平行移動.

$\boldsymbol{x}$ 点で 2 つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を考えよう．$\boldsymbol{A}$ を基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ で，$\boldsymbol{B}$ を双対基底 $\{\boldsymbol{e}_i^*\}$ で表せば，これは

$$\boldsymbol{A} = \sum A_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{B}^* = \sum B_j^* \boldsymbol{e}_j^* \tag{3.16}$$

と書ける．この 2 つのベクトルの内積は，(3.7) より

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \sum A_i B_i^* \tag{3.17}$$

である．つまり，2 つのベクトルの内積を表すのに，一つを自然基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ で，他を双対自然基底 $\left\{\boldsymbol{e}_j^*\right\}$ で表すと，内積は成分の積和になる．

さらに，$\boldsymbol{A}$ を点 $\boldsymbol{x}$ から点 $\boldsymbol{y}$ にアファイン的に平行移動する．もちろん $\boldsymbol{A}$ はどこでも (3.16) のように書けて成分はそのままである．一方，$\boldsymbol{B}$ を双対アファイン的に平行移動する．すなわち，$\boldsymbol{B}$ を $\left\{\boldsymbol{e}_j^*\right\}$ 基底として書けば（成分は B_j^* となる），これはそのままで点 $\boldsymbol{y}$ でのベクトルに移動できる．もちろん $\boldsymbol{B}^*$ は，$\boldsymbol{B}$ をアファイン的に（双対アファイン的にではなく）移動したものとは違う．なぜなら，$\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{B}^*$ の成分どうしの関係は，

$$B_j = \sum_i g_{ji}^*(\boldsymbol{x}) B_i^* \tag{3.18}$$

となっていて，これは場所ごとに違うからである．

平坦性が双対ということは，ベクトルのアファイン的平行移動で書ける．2 つのアファイン的な平行移動があり，2 つのベクトル $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ を考え，$\boldsymbol{A}$ をアファイン的に平行移動し，$\boldsymbol{B}$ はもう一つのアファイン構造で平行移動したとき，2 つのベクトルの内積が保存されるとする．すなわち，

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^* \rangle_{\boldsymbol{x}} = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^* \rangle_{\boldsymbol{y}} . \tag{3.19}$$

このとき，2 つのアファイン構造は計量に関して双対であるという[*4)]．このことは，2 つの基底の正規直交性

$$\left\langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j^* \right\rangle = \delta_{ij} \tag{3.20}$$

がどの場所でも成立していることと同値である．

3.3 拡張ピタゴラスの定理，射影定理

3.3.1 拡張ピタゴラスの定理

凸関数に由来する双対平坦空間には，ダイバージェンスと平坦な線（測地線）

*4)　一般の双対構造を持つ空間（平坦でなくてもよい）でも，接ベクトルのアファイン接続による平行移動，および双対アファイン接続による平行移動組によって内積が保存される．これが双対性の定義である．

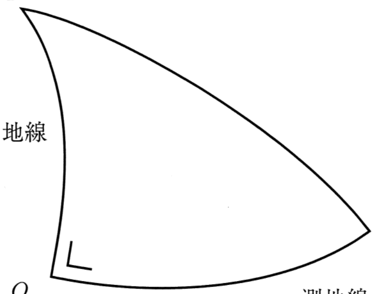


図 3.2　拡張ピタゴラスの定理.

が定義されている．さらに，2 つの線の直交性も定義できる．これだけの材料が揃うと，ユークリッド空間において成立するピタゴラスの定理や射影定理がここではどうなるのだろうと気にかかる*5)．

いま，3 点 P, Q, R を考える．P と Q を結ぶ双対測地線が，Q と R を結ぶ測地線と直交していたとしよう（図 3.2）．別に，P と R を結ぶ必要はないが，これを結べば，双対空間における直角三角形ができ上がる．

定理 3.2　双対平坦空間における直角三角形において，ピタゴラスの定理が成立する．すなわち，

$$D[P:R]=D[P:Q]+D[Q:R]. \tag{3.21}$$

証明　双対平坦空間において，ダイバージェンスは凸関数を用いて

$$D[P:Q]=\psi\left(\boldsymbol{x}_P\right)+\psi^*\left(\boldsymbol{x}_Q^*\right)-\boldsymbol{x}_P\cdot\boldsymbol{x}_Q^* \tag{3.22}$$

のように書ける．したがって，これをもとに少しの演算を実行すると

$$D[P:Q]+D[Q:R]-D[P:R]=\left(\boldsymbol{x}_P^*-\boldsymbol{x}_Q^*\right)\cdot\left(\boldsymbol{x}_Q-\boldsymbol{x}_R\right) \tag{3.23}$$

が成立する．一方，P と Q を結ぶ双対測地線は，

$$\boldsymbol{x}^*(t)=(1-t)\boldsymbol{x}_P^*+t\boldsymbol{x}_Q^* \tag{3.24}$$

で，その接線方向は $\boldsymbol{x}_1^*-\boldsymbol{x}_P^*$ である．また，Q と R を結ぶ測地線は

$$\boldsymbol{x}(t)=(1-t)\boldsymbol{x}_Q+t\boldsymbol{x}_R \tag{3.25}$$

で，その接線方向は $\boldsymbol{x}_Q-\boldsymbol{x}_R$ である．この 2 つが直交することから

$$\left(\boldsymbol{x}_P^*-\boldsymbol{x}_Q^*\right)\cdot\left(\boldsymbol{x}_Q-\boldsymbol{x}_R\right)=0 \tag{3.26}$$

したがって，ピタゴラスの定理が成立する．

*5)　ピタゴラスの定理と呼ばれる三平方の定理は，実は古代バビロニアにおいて今から 4000 年ほど前には知られていたという．この証拠が粘土板に記された謎の数列とその解読によって明らかにされた[2]．これは古代ギリシャによる定理の証明をさかのぼること 1300 年である．

読者は，なぜはじめに P と Q を結ぶのに双対測地線が出てくるのか（測地線ではだめなのか），気になるかもしれない．もちろん，これは気にする必要はない．双対ピタゴラスの定理が成立する．

定理 3.3 P と Q を結ぶ測地線が Q と R を結ぶ測地線と直交するとき

$$D^*[P:R] = D^*[P:Q] + D^*[Q:R] \tag{3.27}$$

が成立する．

もちろん $D^*[P:R] = D[R:P]$ だから何のことはない，ダイバージェンスの変数の位置を入れ替えるだけで，すべては双対にできている．

これを拡張ピタゴラスの定理と呼ぶ．これは，ピタゴラスの定理を含み，その拡張になっているからである．すなわち，凸関数が

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum x_i^2 \tag{3.28}$$

で与えられたとしよう．すると，ダイバージェンスはユークリッド距離の2乗であり，アファイン座標系 $\boldsymbol{x}$ と双対アファイン座標系 $\boldsymbol{x}^*$ は一致するから，測地線も双対測地線も同じで，ユークリッド空間の直線である．そして，上記の定理はまさしくピタゴラスの定理に他ならない．つまり，この定理はピタゴラスの定理を特別の場合として含んでいる．

3.3.2 射影定理

ユークリッド空間において，一点 P とこれを通らない滑らかな曲面 M があったとしよう．点 P に一番近い点を曲面上に探したい．答えは，点 P を曲面に射影すればよい．射影した点を P' とする．射影とは，P と P' を結ぶ直線が，曲面と直交する点のことである．その証明にはピタゴラスの定理が使える．すなわち，P' からほんの少し離れた曲面上の点を R とすると，ピタゴラスの定理によって，

$$D[P:R] = D\left[P:P'\right] + D\left[P':R\right] > D\left[P:P'\right] \tag{3.29}$$

となる．だから，P に一番近い曲面上の点は，射影で得られる P' である．

同じことが双対平坦性でもいえる．双対平坦空間で，一点 P とそれを含まない曲面 M を考える（図 3.3）．M の点 P' が，点 P と P' を結ぶ測地線が曲

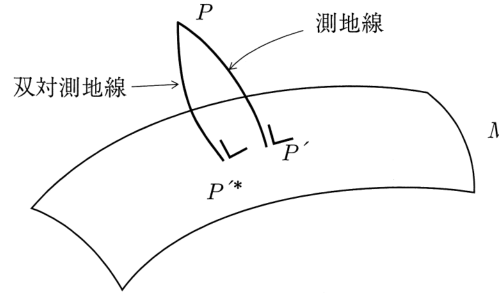


図 3.3 射影定理（定理 3.4）．

面と直交するとき，P' を P の M への射影という．P'^* と P を結ぶ双対測地線が曲面と直交するとき，P'^* を P の M への双対射影という．測地線が曲面と直交するとは，測地線の接線が曲面のすべての接ベクトルと直交することである．

定理 3.4（射影定理 1）　曲面 M が与えられたとき，P から M へのダイバージェンス

$$D[P:M] = \min_{R \in M} D[P:R] \tag{3.30}$$

を最小にする M の点 P' は，P の M への双対射影である．一方，P の M への双対ダイバージェンス

$$D^*[P:M] = \min_{R \in M} D[P:R] \tag{3.31}$$

を最小にする点 P'^* は，P の M への射影である．

注意：P から M への最小点を求めるとき，射影は必要条件ではあるが十分ではない．射影 P' は極大点であったり鞍点であったりすることもある．次の定理は射影の一意性を保証する．

定理 3.5　M が双対平坦の曲面であるとき，P から M への射影は一意である．また，平坦な曲面であるとき，M への双対射影は一意である．

この定理は，曲面 M が平坦（双対平坦）のときには，ピタゴラスの定理が大域的に成立することから確かめられる．

終わりの一言

本回は，凸関数から導かれるダイバージェンスとその空間の幾何学構造を考えた．これは，双対平坦な測地線構造を持つリーマン空間になった．でも，凸関数の選び方には任意性がある．

逆に，空間に双対アファイン構造が定義されていたとしよう．このとき，空間には凸関数が存在して，双対構造はこの関数から導けることを示せる．だから，実は凸関数は双対平坦性の表現でもある．ここから導かれるダイバージェンスを，双対平坦空間の規範ダイバージェンスという．双対平坦構造，いやもっと一般に双対構造はどこから出てくるのだろう．次回は確率分布空間の場合を調べ，さらに拡張ピタゴラスの定理や射影定理がどう使われるのかを調べよう．

参考文献

1) L. Bregman, The relaxation of finding a common point of convex sets and its applications to the solution of problems in convex programming, *Comp. Math. Phys* (USSR), **7**, 200–217, 1967.
2) 中村滋，『数学の花束』，岩波書店，2008.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

2010年（1月号～12月号）総目次

Vol. 48, No. 559～Vol. 48, No. 570

■インタビュー

特　集（2011年2月号予告）

物理現象を読み解く数学的手法

統計物理のための新しい数学

本体 952 円

特　集（2010年12月号）

物理における《破れ》と調和

本体 952 円

編集後記

ここ数年，年が変わるときに，その年のメモリアルイヤーの人は誰かを調べることが多くなりました．今年は数学者では黒川先生が各論記事の中で述べられているようにガロア生誕 200 年です．他にも生誕 100 年で角谷静夫先生がいらっしゃるようです．他分野では，ガロアと同じ生誕 200 年でピアニスト・作曲家であるF. リスト，生誕 100 年でアメリカの大統領だったR. レーガンがいるようです．こうした一つの区切りをきっかけにメモリアルイヤーを記念した行事が行われることもあると思います．例えば数学者で言えば，本屋さんなどで関連した書籍の紹介，音楽家であれば演奏会で取り上げる，ということになるでしょうか．こうしたメモリアルイヤーを通して，先人たちの偉大な業績を忘れたくはないものです．　(R)

数　理　科　学　1月号

2011年1月1日発行

数理科学編集部　　　　発行人 木　下　敏　孝

TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 ©　株式会社 **サ イ エ ン ス 社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁